

12 群(電子情報通信基礎) - 4 編(力学・電磁気学)

9 章 電磁誘導と電磁波

(執筆者：來住直人) [2013 年 5 月 受領]

概要

6 章から 8 章においては定常的、すなわち時間変化のない電界と磁界を独立に扱ってきた。しかしながら、これらの場に時間変化が生じた場合は電界と磁界の間の相互作用により、これらの場は独立ではなくなる。本章ではこのような時間的に変化する電界と磁界を統一的に扱う概念である「電磁界」について記述する。

【本章の構成】

9-1 節と 9-2 節では、磁界の時間的な変化により電界が発生する現象を扱い、これに関連して 9-3 節では磁界のエネルギーを定義する。9-4 節では 8-2 節のアンペールの法則を、導体で閉じていない回路や非定常電流においても成立するように補正し、これらを基にして 9-5 節において電磁界の基本方程式であるマクスウェルの方程式を提示する。9-6 節と 9-7 節では、マクスウェルの方程式から導出される波動である電磁波の性質について記述する。

- 9-1 電磁誘導
- 9-2 インダクタンス
- 9-3 磁界のエネルギー
- 9-4 変位電流
- 9-5 マクスウェルの方程式
- 9-6 電磁波
- 9-7 正弦電磁波

12 群 - 4 編 - 9 章

9-1 電磁誘導

(執筆者：來住直人) [2013 年 5 月受領]

まずは、磁界の時間的変化に伴い生じる電氣的現象について考える．図 9.1 のように、コイルに永久磁石を近づけたり遠ざけたりした場合、コイルにつなげた回路に電流が流れる．一般的には、コイルの外部からかかる磁界の大きさが時間的に変化する場合に、コイルには起電力が発生し、電流が流れる．この起電力に伴う電流によってコイルに発生する磁界は、コイル外部からかかる磁界の変化を妨げる極性を持っている．これをレンツの法則と呼ぶ．

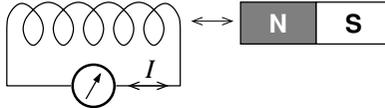


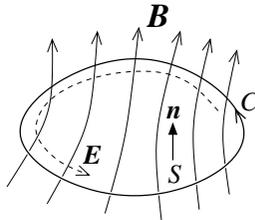
図 9.1 磁界の変化によりコイルに誘導される電流

レンツの法則において、コイルに起電力が発生することは、コイルのコイルを構成する閉じたループに添って周回状の電界が発生することを意味する．この電界を誘導電界と呼ぶ．誘導電界のループ状の閉経路における周回線積分は 0 とならないため、誘導電界は静電界と異なり保存力の場ではない．ここで、誘導電界により生じる起電力である誘導起電力の大きさと、コイルを貫く、すなわちコイルと鎖交する磁界の変化との関係を定量化したのがファラデーの法則である．図 9.2 のような閉じたループ C と鎖交する磁界 B が変化し、ループ C に誘導起電力が発生しているとする．このとき、ループ C と鎖交する磁束 Φ は、

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (9.1)$$

のように磁束密度の面積分で表現できる．6-2 節で扱った積分と同様に、面 S はループ C を周辺曲線とする開いた曲面で、 \mathbf{n} は面 S の法線ベクトルで方向はループ C の右ネジ方向の順方向である．ファラデーの法則では、ループ C と鎖交する磁束 Φ の時間変化と、 C における誘導電界の周回線積分、すなわち誘導起電力との間には以下の関係が成立することを要請している．

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (9.2)$$

図 9.2 ループ C と鎖交する磁束の変化により C に添って生じる誘導電界

式 (9.2) のファラデーの法則にストークスの定理 (??) を用いると、

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS$$

を得るが、これは任意の面 S で成立するので、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9.3)$$

が成立する。これはファラデーの法則 (9.2) の微分形である。

ファラデーの法則 (9.2) は、磁界の大きさが不変であっても、コイルを鎖交する磁束の変化がある場合は成立する。例えば図 9.3 のように、幅 ℓ の半無限平行矩形導線があり、矩形の左辺と平行に置いた導体の棒が x 軸方向に速さ v で移動しており、矩形の面に垂直方向に大きさ B の一様な磁界が存在しているものとする。このとき、矩形と導体の棒で作られる閉じたループと鎖交する磁束は、このループが囲む面積の変化に伴い変化している。棒の座標 x を用いると、この磁束は $\Phi = Bx\ell$ と表されるので、棒の位置の変化によって生じる誘導起電力は、

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell v$$

と表される。

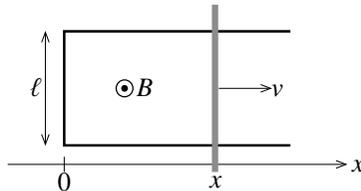


図 9.3 矩形ループの形状変化に伴う鎖交磁束の変化

12 群 - 4 編 - 9 章

9-2 インダクタンス

(執筆者：來住直人)[2013 年 5 月受領]

ソレノイドなどのコイルに電流を流すことで発生する磁界は、そのコイル自身と鎖交することになり、コイルと鎖交する磁束 Φ はコイルに流れる電流 I に比例するので、

$$\Phi = LI \quad (9.4)$$

が成立する．ここで比例係数 $L (> 0)$ をコイルの自己インダクタンスもしくは自己誘導係数と呼ぶ．電流 I が時間的に変化する場合はファラデーの法則 (9.2) により、

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \quad (9.5)$$

で表される誘導起電力 V が生じる．この式は電気回路におけるコイルの電圧降下の値を与えていることが分かる．

次に、図 9.4 のように、電流 I_1 で駆動されている 1 つのコイル (コイル 1) による電磁石が発生する磁束が、別のコイル (コイル 2) に鎖交している場合を考える．コイル 2 に鎖交する磁束 Φ_{21} は電流 I_1 に比例するので、比例係数を M_{21} として、

$$\Phi_{21} = M_{21}I_1 \quad (9.6)$$

が成立する．係数 M_{21} をコイル 2 のコイル 1 に対する相互インダクタンスもしくは相互誘導係数と呼ぶ．電流 I_1 が時間的に変化する場合はファラデーの法則 (9.2) により、コイル 2 に誘導起電力

$$V_{21} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt} \quad (9.7)$$

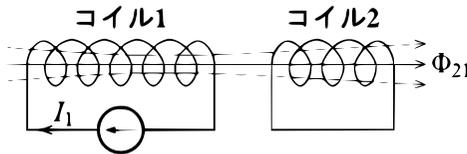


図 9.4 異なるコイルへ鎖交する磁束

が発生する．これを相互誘導と呼ぶ．これらと同様の関係はコイル 2 を電流 I_2 で駆動して発生する磁束がコイル 1 に鎖交する場合においても成立する．すなわち、このときコイル 1 に鎖交する磁束 Φ_{12} については、

$$\Phi_{12} = M_{12}I_2 \quad (9.8)$$

となり、電流 I_2 が時間的に変化する場合は、コイル 1 に誘導起電力

$$V_{12} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (9.9)$$

が発生する．係数 M_{21} はコイル 2 のコイル 1 に対する相互インダクタンスだが，これら 2 つの相互インダクタンスについては，

$$M_{12} = M_{21} = M \quad (9.10)$$

が成立し，2 つのコイル間の相互インダクタンスは等しい値を持つ．この関係は，6-7 節で扱った静電容量において成立するものと同様の相反性である．

コイルが N 個存在する場合は，各コイルの電流 I_i と鎖交する磁束の総和 Φ_i ，電流が変化する場合の誘導起電力 V_i ($i = 1, 2, \dots, N$) の間には，式 (9.5) から (9.9) に対応して，

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1N} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ L_{N1} & L_{N2} & \cdots & L_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ I_N \end{bmatrix} \quad (9.11)$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ V_N \end{bmatrix} = -\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1N} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ L_{N1} & L_{N2} & \cdots & L_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ I_N \end{bmatrix} \quad (9.12)$$

が成立する．また，相反性により，

$$L_{ij} = L_{ji} \quad (9.13)$$

も成立する．

以下に，インダクタンスに関するいくつかの解析の例を示す．

(1) 無限長ソレノイドの単位長さ当たりのインダクタンス

図 9.1(a) に示したような，単位長さ当たりのコイルの巻数が N で，電流が I の無限長ソレノイドにおいては，内部において軸方向に一樣な磁界 $B = \mu_0 NI$ が生じていることは既に求めている．これによる磁束 Φ は単位長さ当たりソレノイドに N 回鎖交しているので，ソレノイドの断面積を S として，

$$\Phi = NBS = \mu_0 N^2 IS$$

を得るので，求めるインダクタンスは，

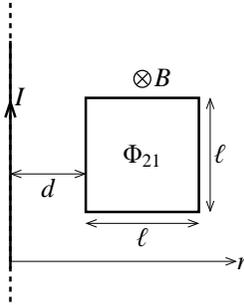


図 9.5 無限長直線電流と矩形ループ

$$L = \mu_0 N^2 S$$

で与えられる。

(2) 無限長直線電流から矩形ループに鎖交する磁束

図 9.5 のように大きさ I の無限長直線電流から距離 d を隔てたところに辺の長さが ℓ の矩形 (正方形) のループに鎖交する磁束 Φ_{21} を求める。電流 I が作る磁界の大きさは 8-1 節の式 (??) のように電流からの距離の関数で与えられる。これより、矩形に鎖交する磁束は、

$$\Phi_{21} = \int_d^{d+\ell} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr \ell = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \log_e \left(1 + \frac{\ell}{d} \right)$$

となる。なお、これより直線電流と矩形間の相互インダクタンス M は、以下で与えられる。

$$M = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \log_e \left(1 + \frac{\ell}{d} \right)$$

(3) 図 9.5 の矩形ループから無限長直線状コイルに鎖交する磁束

図 9.5 において、(2) とは逆に矩形ループに大きさ I の電流が流れているとき、電流を流さない無限長直線状導体をコイルとみなし、これに鎖交する磁束 Φ_{12} を求める。この際に矩形ループの電流が作る磁界を求め、これから無限長直線状コイルに鎖交する磁束を求めるのは、極めて難解な計算の手順を要するので解法としては不適である。そこで (2) の結果を利用して求めることにする。矩形ループの電流 I によって無限長直線状コイルに鎖交する磁束は、式 (9.8) 及び相反性 (9.10)、(2) の結果より、

$$\Phi_{12} = M_{12} I = M I = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \log_e \left(1 + \frac{\ell}{d} \right)$$

となる。

12 群 - 4 編 - 9 章

9-3 磁界のエネルギー

(執筆者：來住直人) [2013 年 5 月 受領]

6-11 節では、静電界においては静電気力に起因する仕事により空間などに蓄えられるエネルギーを扱ったが、磁界についても同様の扱いが可能である。例えば、図 9.6 のように、電流が流れているコイルに蓄えられているエネルギーについて考える。時間 $t < 0$ において図のスイッチ (SW) が閉じており、インダクタンス L のコイルからなる閉じた回路に大きさ I_0 の定常電流が流れている。定常状態ではファラデーの法則によりコイルの誘導起電力 $V(t) = 0$ となるが、 $t = 0$ でスイッチを開き、抵抗 R を通して電流を流すことで電流 $I(t)$ が変化することで誘導起電力が生じる。よって、 $t > 0$ においては、図の向きにおいて誘導起電力 $V(t) = LdI/dt$ が生じるので、

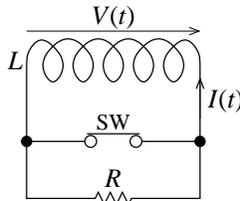


図 9.6 コイルに蓄えられたエネルギーを抵抗で消費させるための回路

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0$$

が成立する。この式を初期条件 $I(0) = I_0$ のもとで解くと、

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

を得る。 $t \geq 0$ においては抵抗 R に電流が流れ、コイルに蓄えられたエネルギーが抵抗において消費されるが、このエネルギーは抵抗の消費電力を積分して求められるので、

$$\int_0^{\infty} I^2 R dt = I_0^2 R \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{2R}{L}t\right) dt = \frac{1}{2} L I_0^2$$

となる。これより、電流 I が流れるインダクタンス L のコイルに蓄えられている磁気エネルギーを、

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\Phi^2}{2L} \quad (9.14)$$

と記述する。このエネルギーは、静電エネルギーと同様に空間に蓄えられているエネルギーと解釈することもできる。例えば、無限長ソレノイドに単位長さあたりに蓄えられるエネルギーを求めると、単位長さあたりのインダクタンスは $L = \mu_0 N^2 S$ で、内部の磁界は $B = \mu_0 N I$ なので、

$$W = \frac{1}{2}\mu_0 N^2 S I^2 = \frac{(\mu_0 N I)^2}{2\mu_0} S = \frac{B^2}{2\mu_0} S = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 S = \frac{1}{2} H B S$$

となる．したがって，空間には密度 $1/2HB$ で磁気エネルギーが蓄えられていることを意味する．これを一般化すると，磁界のある空間には密度

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu |\mathbf{H}|^2 \quad (9.15)$$

で磁気エネルギーが蓄えられていることになる．

12 群 - 4 編 - 9 章

9-4 変位電流

(執筆者：來住直人)[2013年5月受領]

8-2 節と 8-5 節において取り上げたアンペールの法則には以下の 2 つの制限があるので、これらについての検証を行う。

- ① 閉じた回路（導体ですべて接続された回路）以外には適用できない。
- ② 定常電流の作る磁界のみで適用可能である。

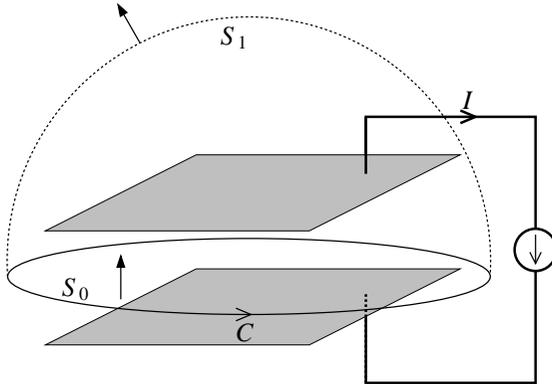


図 9.7 アンペールの法則でキャパシタを含む回路にとった経路 C に鎖交する電流を求めるための面のとり方

① 図 9.7 に示すような、大きさ I の電流で駆動された平行平板キャパシタを考え、キャパシタの極板間に存在する極板と平行な経路 C に、 H に関するアンペールの法則 (??) を適用する。経路 C に鎖交する電流を考える際に、図のように C を周辺曲線とする、極板内部に存在する面 S_0 もしくは極板の外側の回路の導線を通る面 S_1 をとると、電流はキャパシタのところでは不連続となるため、8-5 節の式 (??) は、

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \begin{cases} 0 & (S_0) \\ I & (S_1) \end{cases}$$

となり、鎖交する電流の値が一意的に決まらないため、キャパシタを含んだ回路のように導体を含まない部分がある場合にはアンペールの法則は適用できない。

② 8-5 節のアンペールの法則の微分形 (??) の両辺の発散をとると、

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J}_e$$

となるが、左辺はベクトル公式により 0 となり、右辺を 7-2 節で示した電荷の保存則 (??) を用いて電荷密度で書き換えることにより、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

を得る。したがって、電荷密度 ρ が時間的に一定、すなわち定常電流においてのみアンペールの法則は適用可能であることが分かる。

上記の①と②の制限を持つアンペールの法則を修正することで、閉じた回路以外や、時間的に変化する電流についても適用可能な形式に書き換えることを試みる。誘電体に関するガウスの法則の微分形(??)と電荷保存則(??)において、伝導電流の源となる真電荷密度が ρ なので、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_e$$

を得る。よって、

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (9.16)$$

が成立する。ここで、8-5 節のアンペールの法則の微分形(??)の右辺を、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \left(\mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \quad (9.17)$$

のように修正し、 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ をキャパシタの極板間を流れる電流とみなすことで、図 9.7 のようなキャパシタを含んだ回路においても、以下に示すように電流が連続となる。

キャパシタの極板の片方の電荷量を Q 、その面電荷密度を σ とすると、回路に流入する電流 I は、

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \sigma dS = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$$

のように $\partial \mathbf{D} / \partial t$ を電流密度として面積分した量と等しくなる。よって、キャパシタの極板間の $\partial \mathbf{D} / \partial t$ は、回路を流れる伝導電流 \mathbf{J}_e と連続してループ状の閉じた電流を作っているとみなすことができる。更に、式 (9.17) の両辺の発散をとると項 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ がない場合とは異なり、式 (9.16) により、その右辺は定常電流以外においても 0 となる。

以上のように、アンペールの法則の適用制限①と②は、項 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ を加えることで除去される。この項は電流密度と同一の次元を持つ量で、これを変位電流と呼ぶ。式 (9.17) は、8-5 節に示した式(??)と(??)、(??)を用いることで、磁界 \mathbf{B} に関する以下の表現、

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J}_e + \mathbf{J}_m + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \quad (9.18)$$

に書き換えられる。この修正された表現を、アンペール-マクスウェルの法則と呼ぶ。

12 群 - 4 編 - 9 章

9-5 マクスウェルの方程式

(執筆者：來住直人) [2013 年 5 月 受領]

変位電流の導入により、電界と磁界は互いに相互作用する場であることが明らかになり、電界 E と磁界（磁束密度） B に関する基本方程式を以下のようにまとめることができる。

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (9.19a)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \left(J + \frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial t} \right) \quad (9.19b)$$

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (9.19c)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (9.19d)$$

式 (9.19a) はファラデーの法則 (9.3) で、式 (9.19b) はアンペール-マクスウェルの法則 (9.18) であり、電流密度 J は 8-5 節で定義した外部に取り出すことのできる電流密度 J_e と磁化電流 J_m の和となる。式 (9.19c) と (9.19d) はそれぞれ 6-2 節と 8-1 節に示した電界と磁界に関するクーロンの法則 (??), (??) である。これらの 4 式をマクスウェルの方程式と呼び、電気及び磁気に関するあらゆる現象はマクスウェルの方程式に従う。このようにマクスウェルの方程式によって記述される電界と磁界の組を電磁界と呼ぶ。

上記のマクスウェルの方程式は E - B 対応の表現である。これに対して、後述する電磁波を扱う場合には以下の E - H 対応の表現も利用される。

$$\nabla \times E = -\frac{\partial(\mu H)}{\partial t} \quad (9.20a)$$

$$\nabla \times H = J_e + \frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial t} \quad (9.20b)$$

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (9.20c)$$

$$\nabla \cdot H = \frac{\rho_m}{\mu_0} \quad (9.20d)$$

12 群 - 4 編 - 9 章

9-6 電磁波

(執筆者：來住直人) [2013 年 5 月受領]

等方(諸定数が方向に依存しない)で均質, 時不変(状態が時間的に変化しない)の媒質において電流と電荷が存在しない場合は, E - H 対応のマクスウェルの方程式 (9.20a)~(9.20d) は,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (9.21a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (9.21b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (9.21c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (9.21d)$$

と書き直される。ここで, ベクトル公式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (9.22)$$

を用いて式 (9.21a) の両辺の回転をとると,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \nabla \times \mathbf{H}}{\partial t}$$

を得るが, 式 (9.21b) と (9.21c) より,

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

を得る。同様に式 (9.21b) の両辺の回転をとると同様の手順で,

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

を得る。まとめると, 電界 \mathbf{E} と磁界 \mathbf{H} は同一の波動方程式

$$\nabla^2 \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = 0 \quad (9.23)$$

を満たすことになる。したがって, これらの電界と磁界の組は波動とみなすことができ, このような形態を電磁波と呼ぶ。

直角座標系においてラプラシアン ∇^2 は,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (9.24)$$

の形式をとるので, 波動方程式 (9.23) は, 以下の形式の解を持つことが分かる。

$$\mathbf{E} = f\left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c}\right) \mathbf{E}_0 \quad (9.25a)$$

$$\mathbf{H} = g\left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c}\right) \mathbf{H}_0 \quad (9.25b)$$

ここで、 \mathbf{E}_0 と \mathbf{H}_0 は定ベクトル、 \mathbf{n} は定単位ベクトル、 f と g は一次元の関数、 c は定数である。これらは、 \mathbf{n} 方向に速さ c で進む波動を表していることは明らかである。式 (9.25a) もしくは (9.25b) を波動方程式 (9.23) に代入することで、

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (9.26)$$

となることが分かり、これが電磁波の伝搬速度を表す。真空においては $\varepsilon = \varepsilon_0$ 、 $\mu = \mu_0$ となるので、伝搬速度 c_0 は、

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (9.27)$$

すなわち、真空の光速となる。真空以外の媒質では $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ 、 $\mu \geq \mu_0$ なので、

$$\frac{c_0}{c} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}} = n \geq 1 \quad (9.28)$$

となる。 n は媒質の真空に対する屈折率である。なお、この波動の波面は、式 (9.25a) と (9.25b) の形式から、関数 f と g の引数が一定の軌跡となる。この軌跡は平面となるので、式 (9.25a) と (9.25b) で表される波動を平面波と呼ぶ。

平面波において、ベクトル \mathbf{E}_0 と \mathbf{H}_0 、 \mathbf{n} 間の関係をマクスウェルの方程式から明らかにしてみよう。解 (9.25a) と (9.25b) と式 (9.21a) に代入すると、

$$\nabla \times (f\mathbf{E}_0) = f\nabla \times \mathbf{E}_0 + \nabla f \times \mathbf{E}_0 = -\frac{f'}{c}\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 = -\mu \frac{\partial(g\mathbf{H}_0)}{\partial t} = -\mu g' \mathbf{H}_0$$

より、

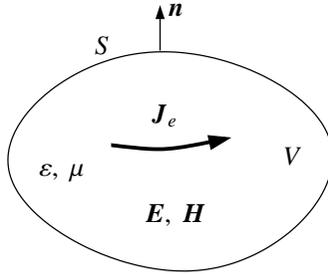
$$\frac{f'}{c}\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 = \mu g' \mathbf{H}_0 \quad (9.29a)$$

を得る。外積の性質により、 \mathbf{H}_0 は \mathbf{E}_0 と \mathbf{n} と直交することになる。同様に、解を式 (9.21b) に代入することで、

$$-\frac{g'}{c}\mathbf{n} \times \mathbf{H}_0 = \varepsilon f' \mathbf{E}_0 \quad (9.29b)$$

が得られ、これから \mathbf{E}_0 と \mathbf{n} も互いに直交することが分かる。したがって、平面波においては電界と磁界、波動の進行方向は互いに直交することになる。

波動はエネルギーを運ぶ性質があるので、電磁波が運ぶエネルギーについて考えてみる。図 9.8 に示すような、閉曲面 S に囲まれた領域 V は誘電率 ε 、透磁率 μ の時不変の等方、一様な媒質とする。 V には、外部からの起電力に駆動された伝導電流 \mathbf{J}_e が存在する。この媒質におけるマクスウェルの方程式の第一、第二式 (9.20a)、(9.20b) は、

図 9.8 時不変な等方で一様な媒質 V 中の電磁界

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_e + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

と表される．ここで，電界と磁界の回転 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ の発散を計算すると，ベクトル公式と上式より，

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \\ &= \mathbf{H} \cdot \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) - \mathbf{E} \cdot \left(\mathbf{J}_e + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_e - \left(\varepsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \\ &= -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_e - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon |\mathbf{E}^2| + \frac{1}{2} \mu |\mathbf{H}^2| \right)\end{aligned}$$

を得る．この両辺を領域の体積 V で積分すると，

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = \int_V (-\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_e) dV - \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon |\mathbf{E}^2| + \frac{1}{2} \mu |\mathbf{H}^2| \right) dV$$

となるが，ガウスの発散定理 (??) を用いて左辺を面 S 上の面積分に変換し，整理すると，

$$\int_V (-\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_e) dV = \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon |\mathbf{E}^2| + \frac{1}{2} \mu |\mathbf{H}^2| \right) dV + \int_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS \quad (9.30)$$

となる．この式の左辺は外部からの起電力によって領域 V に供給される電力である．右辺第一項の被積分関数は，それぞれ 6-11 節の式 (??) と (9.15) により空間に蓄えられるの電気エネルギー，磁気エネルギー密度なので，右辺第一項は電気エネルギーと磁気エネルギーの総和の時間変化率，すなわち V における電力増加を表す．エネルギー保存則より右辺第二項はこれらの差，すなわち面 S を通って領域 V から流出する電力となることは明らかである．したがって， $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は領域 V から流出する電力の面密度と流出方向を表すベクトルで，ポインティングベクトルと呼ばれる．

12 群 - 4 編 - 9 章

9-7 正弦電磁波

(執筆者: 來住直人) [2013 年 5 月 受領]

9-6 節と同様な等方で均質、時不変の媒質において、電磁界が角周波数 ω で時間的に正弦波状に変化すると仮定する。時間依存を持つ現象は、連続的な周波数スペクトルを持つ無数の正弦波の重ね合わせで表現できるので、単一の角周波数を持つ電磁波の性質を把握することは重要である。このような場合、電磁界の $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ と $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ は、それぞれ $\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}$ と $\mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}$ の複素表示に置き換えることができる。電流と電荷が存在しない場合を仮定すると、式 (9.21a) から (9.21d) のマクスウェルの方程式は、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (9.31a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} \quad (9.31b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (9.31c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (9.31d)$$

に置き換えられる。このとき、波動方程式 (9.23) も、

$$\nabla^2 \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} + k^2 \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = 0 \quad (9.32a)$$

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{c} \quad (9.32b)$$

と書き換えられる。これはヘルムホルツの波動方程式と呼ばれ、式 (9.25a) と (9.25b) の平面波の形式の解を持つ。時間依存は $e^{j\omega t}$ であることと、関数 f と g が共通の単一の引数 $(t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}/c)$ を持つことから、

$$f\left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c}\right) = g\left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c}\right) = \exp\left[j\omega\left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c}\right)\right] = \exp[j(\omega t - k\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})] \quad (9.33)$$

となる。これは \mathbf{n} 方向に伝搬する角周波数 ω の波動なので k は電磁波の波数であることが分かる。これらより、角周波数 ω の平面波の電磁界は、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{j(\omega t - k\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})} \quad (9.34a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{j(\omega t - k\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})} \quad (9.34b)$$

となる。更に、式 (9.29a) と (9.29b) からは、

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z} \mathbf{n} \times \mathbf{E} \quad (9.35a)$$

$$\mathbf{E} = -Z \mathbf{n} \times \mathbf{H} \quad (9.35b)$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (9.35c)$$

を得る．これらより電界と磁界の振幅の比は一定の値 Z となり， Z を電磁界の波動インピーダンスと呼ぶ．真空もしくは空気中においては波動インピーダンスは，

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cong 120\pi \Omega \cong 377 \Omega \quad (9.36)$$

となる．

次に，異なる 2 つの媒質の境界における電磁界の関係を 6-10 節と 8-6 節に基づいて考えてみる．境界面に電流や真電荷が存在しない場合は，電界 E の接線方向成分と，電束密度 E の法線方向成分，補助磁界 H の接線方向成分と磁束密度 B の法線方向成分のそれぞれが境界面で連続であることが要請されている．これらは電磁界においても成り立つが，電界と磁界は独立ではないために，異なる界の境界条件に関係が生じる．境界面上に任意の面 S をとり，その周辺曲線を C とする． S 上において式 (9.31a) を面積分し，左辺を 6-2 節で示したストークスの定理 (??) を用いて C 上の線積分に変換すると，

$$\int_S \nabla \times E \cdot ndS = \oint_C E \cdot dl = -j\omega \int_S \mu H \cdot ndS = -j\omega \int_S B \cdot ndS$$

となるので，

$$\oint_C E \cdot dl = -j\omega \int_S B \cdot ndS \quad (9.37a)$$

を得る．同様に，式 (9.31b) を S 上において面積分し，積分変換を行うと，

$$\oint_C H \cdot dl = j\omega \int_S D \cdot ndS \quad (9.37b)$$

を得る，式 (9.37a) おいて左辺は E の接線方向成分を境界面上で線積分しているので， E の境界条件が成立する場合は左辺の線積分の値は境界の両側で等しい値をとることになる．したがって，右辺の B の面積分の値も境界の両側で等しい値をとる．この面積分は境界の B の法線方向成分を対象としており，式 (9.37a) は境界面上の任意の S で成立することから， B の法線方向成分は境界の両側で等しい値をとる．同様に式 (9.37b) からは，境界条件により H の接線方向成分が境界の両側で等しい場合は， D の法線方向成分は境界の両側で等しい値をとることが分かる．したがって，電磁界においては， E に対する境界条件 (E の接線方向成分の連続性) が満たされることで B に対する境界条件 (B の法線方向成分の連続性) が従属的に満たされ， H に対する境界条件 (H の接線方向成分の連続性) が満たされることで D に対する境界条件 (D の法線方向成分の連続性) が従属的に満たされることになる．

軸方向に一樣な構造を持つ伝送線路などを伝搬する電磁波は，正弦電磁波の重要な形態の一つである．伝搬方向を z 軸にとり， z 軸方向の波数を β とすると，この波動は，時間・ z 軸方向依存性を以下のように考慮して記述される．

$$\begin{bmatrix} E(t, r) \\ H(t, r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(x, y) \\ H(x, y) \end{bmatrix} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (9.38)$$

更に、演算子 ∇ を、

$$\nabla = \nabla_t + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = \nabla_t - j\beta \mathbf{k} \quad (9.39a)$$

$$\nabla_t = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \quad (9.39b)$$

$$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla_t^2 - \beta^2 \quad (9.39c)$$

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (9.39d)$$

のように横断面 (x,y) 方向成分 ∇_t と z 軸方向成分に分離して表現すると、式 (9.32a) のヘルムホルツの波動方程式は、

$$\nabla_t^2 \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} + (k^2 - \beta^2) \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = 0 \quad (9.40)$$

と書き換えられる。

この構造において、前述の平面波のように伝搬軸方向成分を持たない電磁波を考える。電磁界を横断面 (x,y) 方向成分 $\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$ と z 軸方向成分 E_z, H_z に分離して、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_t \\ \mathbf{H}_t \end{bmatrix} + \mathbf{k} \begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} \quad (9.41)$$

と表現すると、この場合は $E_z = H_z = 0$ となり、式 (9.31a) は、

$$(\nabla_t - j\beta \mathbf{k}) \times \mathbf{E}_t = \nabla_t \times \mathbf{E}_t - j\beta \mathbf{k} \times \mathbf{E}_t = -j\omega \mu \mathbf{H}_t$$

となり、横断面方向成分と z 軸方向成分に分離すると、

$$\mathbf{H}_t = \frac{\beta}{\omega \mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_t \quad (9.42a)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t = 0 \quad (9.42b)$$

となるが、式 (9.42b) より、 \mathbf{E}_t は保存力の場となるので、スカラー場 ϕ_E を用いて、

$$\mathbf{E}_t = -\nabla \phi_E \quad (9.43)$$

と表現できる。更に、式 (9.31c) からは、

$$\nabla_t^2 \phi_E = 0$$

のように 6-5 節で取り上げた式 (??) のラプラスの方程式を満たすので、横断面電界 \mathbf{E}_t は静電界と同等の性質を持っている。同様に式 (9.31b) からは、

$$\mathbf{E}_t = -\frac{\beta}{\omega \varepsilon} \mathbf{k} \times \mathbf{H}_t \quad (9.44a)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{H}_t = 0 \quad (9.44b)$$

を得る． \mathbf{H}_t については式 (9.43) 同様なスカラー場による表現も可能だが，式 (9.42a) により \mathbf{E}_t から導出されるので新たなスカラー場を定義する必要はない．式 (9.42a) と (9.44a) からは，

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_t = -\frac{\beta}{\omega \varepsilon} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{H}_t) = -\frac{\beta}{\omega \varepsilon} \{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_t) \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{H}_t\} = \frac{\beta}{\omega \varepsilon} \mathbf{H}_t = \frac{\beta^2}{\omega^2 \varepsilon \mu} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_t)$$

が得られ，これより，

$$\beta^2 = \omega \varepsilon \mu = k^2 \quad (9.45)$$

であることが分かる．したがって，伝搬定数 β の大きさは波数 k の大きさと等しくなり，平面波と同様に式 (9.35a) から (9.35c) により波動インピーダンスが定義できる．このように伝搬軸方向の界成分を持たず，横断面方向界成分のみを有する伝搬軸方向へ伝搬する電磁波を横断面電磁波と呼ぶ．横断面電磁波の例としては，平面波のほかには二導体線路を伝搬する電磁波がある．横断面電磁波に関する記述は以下のようにまとめられる．

$$\beta^2 = \omega \varepsilon \mu = k^2 \quad (9.46a)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t = -\nabla \phi_E \quad (9.46b)$$

$$\nabla_t^2 \phi_E = 0 \quad (9.46c)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_t = \frac{1}{2} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_t \quad (9.46d)$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (9.46e)$$

伝送線路を伝搬する電磁波のなかには，横断面電磁波とは異なり伝搬軸方向成分が 0 とならないものも存在する．そのような場合は，ヘルムホルツの波動方程式 (9.40) を電磁界の z 軸方向成分 E_z と H_z を考慮して解析する必要がある．マクスウェルの方程式 (9.21a) から (9.21d) を用いてヘルムホルツの波動方程式を整理すると，

$$\nabla_t^2 \begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} + (k^2 - \beta^2) \begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} = 0 \quad (9.47a)$$

$$\mathbf{E}_t = \frac{-j\beta}{k^2 - \beta^2} \left(\nabla_t E_z - \frac{\omega \mu}{\beta} \mathbf{k} \times \nabla_t H_z \right) \quad (9.47b)$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{-j\beta}{k^2 - \beta^2} \left(\nabla_t H_z + \frac{\omega \varepsilon}{\beta} \mathbf{k} \times \nabla_t E_z \right) \quad (9.47c)$$

を得る． z 軸方向に一様な構造中を伝搬する横断面電磁波以外の電磁波は，電磁界の z 軸方向成分によって表現可能であることを，式 (9.47a) から (9.47c) は示している．これらの式は， z 軸方向に一様で区分的に均質な媒質からなる，低周波から光波にわたる電磁波伝送路の伝搬特性の解析にも適用される．