

## 12 群(電子情報通信基礎) - 4 編(力学・電磁気学)

## 8 章 磁界

(執筆者：來住直人) [2013 年 5 月 受領]

### 概要

本章においては、時間的変化のない磁界を、電流によって発生する磁界と磁石によって発生する磁界と、物質の磁気的な性質について扱う。

### 【本章の構成】

電荷の巨視的な移動を伴う電流によって作られる磁界について 8-1 節から 8-3 節において扱う。ここで述べている「電荷の巨視的な移動」とは、導体中の電流や電荷の空間的な移動などを指し、原子核に束縛された電子の運動や自転(スピン)は含まない。8-4 節では、磁石によって発生する磁界の性質について記述し、電荷によって生じる静電界と同様に、磁石の磁気力の源である磁荷によって生じる静磁界を取り扱う。8-5 節と 8-6 節では、6-7 節と 6-8 節で扱った電気分極に相当する磁気的な分極の性質を記述する。

- 8-1 電流が作る磁界
- 8-2 アンペールの法則
- 8-3 ベクトルポテンシャル
- 8-4 磁石と磁界
- 8-5 磁性体
- 8-6 磁性体の境界条件

## 12 群 - 4 編 - 8 章

## 8-1 電流が作る磁界

(執筆者：來住直人) [2013 年 5 月受領]

磁界を定義する前に電流間に働く力について考える．2 つの平行に流れる電流の間に力が働くことは，アンペールの実験によって明らかになっている．電流の大きさが  $I_1$  と  $I_2$  の平行な直線電流が距離  $r$  隔てて存在しているとき，電流間には，電流で作られる平面内の電流に垂直方向の力が働く．電流の長さ  $\ell$  の部分の間に働く力  $F$  の大きさ  $|F|$  は， $I_1$  と  $I_2$ ， $\ell$  に比例し， $r$  に反比例する．この関係を式で表すと，

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} \ell \quad (8.1)$$

となる．ここで， $\mu_0$  は真空の透磁率であり，その値は  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \cong 1.257 \times 10^{-6} \text{ H/m}$  である．なお，電流間に働く力については，静電気力と同様に作用反作用の法則と，複数の電流がある場合についての重ね合わせの原理が成立する．

6-2 節において，静電気力から静電界を定義したのと同様に，本節でも，遠隔作用説に基づく電流間に働く力から，近接作用説に基づく静磁界を定義する．2 つの電流  $I_1$  と  $I_2$  が存在する場合に，各々の電流に作用する力の大きさを定義した式 (8.1) より，電流  $I_2$  に働く力は，

$$F = I_2 \ell \left( \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{r} \right) = I_2 \ell B$$

と記述できるが，この式の括弧内の値  $B$  は，電流  $I_1$  によって電流  $I_2$  のある場所に作られる場と解釈できる．したがって，

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{r} \quad (8.2)$$

を，電流  $I_1$  が電流からの距離  $r$  の空間に作る磁界と解釈する．磁界  $B$  のことを磁束密度と呼ぶこともある．磁界もベクトル場なので方向を持つ．そこで磁界の方向を右ネジ方向の順方向とが電流の向きと一致するように定義する．すなわち， $z$  軸方向に向かう大きさ  $I$  の直線電流が電流からの距離  $r$  の点に作る磁界（磁束密度） $B$  は，

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \mathbf{e}_\phi \quad (8.3)$$

と書ける．ここで， $\mathbf{e}_\phi$  は円柱座標の角度  $\phi$  方向の単位ベクトルである．磁界  $B$  によって電

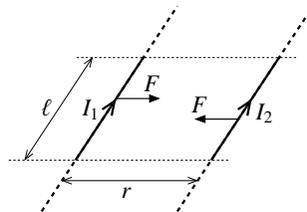


図 8.1 2 つの平行直線電流間に働く力

流  $I'$  の長さ  $\ell$  にかかる力  $F$  は、

$$F = I' \ell \times B \quad (8.4)$$

となる。これを電荷量  $q$  の速度  $v$  で運動する点電荷に働く力に適用することにより、

$$F = qv \times B \quad (8.5)$$

を得る。これをローレンツ力と呼ぶ。

式 (8.3) を一般化し、図 8.2 のように任意の電流中の長さ  $d\ell$  の微小な電流が、微小な電流に対してベクトル  $r$  の位置に作る磁界を表したのが以下に示すビオ-サバールの法則である。

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell \times r}{r^3} \quad (8.6)$$

磁界の基本的な性質は以下の 3 つにまとめられる。

(a) ビオ-サバールの法則

(b) 重ね合わせの原理

複数の電流が存在するときの磁界は、各々の電流が作る磁界を重ね合わせることで計算できる。これにより、ビオ-サバールの法則から出発して、電流全体が作る磁界を計算することが可能になる。

図 8.3 のように、位置ベクトル  $r$  の点の磁界は、ビオ-サバールの法則 (8.6) により定義される微小な電流が作る磁界を重ね合わせることで、電流  $I$  の経路  $C$  の線積分によって以下のように計算できる。

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\ell \times (r - r')}{|r - r'|^3} \quad (8.7)$$

(c) 単極の源の不存在

静電界はこれを発生・消滅させる源である電荷が存在したが、磁界にはこれに対応する源、すなわち単極の磁荷は存在しない。このことにより、磁界に関するガウスの法則は、任意の閉曲面  $S$  に対して、

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (8.8)$$

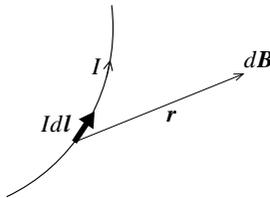
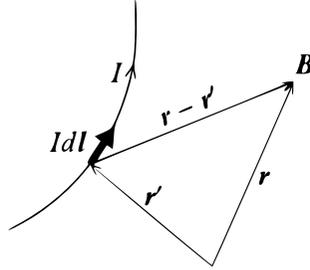


図 8.2 微小な電流  $Id\ell$  が作る磁界  $dB$

図 8.3 電流  $I$  が作る磁界  $B$  の解析

と表現できる．または微分形で，

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (8.9)$$

とも表現できる．これは 6-5 節の電界に関するクーロンの法則式 (??) に対応して，磁界に関するクーロンの法則とも言える．

ビオ-サバルの法則と重ね合わせの原理を用いて，簡単な形状の電流が作る磁界を以下で求めてみる．

#### (1) 無限長直線電流

図 8.4 のように  $z$  軸の正方向に流れる大きさ  $I$  の電流が，距離  $r$  の点に作る磁界を求める．電流は無限長で  $z$  軸対称なので磁界の大きさは  $z$  軸からの距離  $r$  のみの関数になる．ビオ-サバルの法則 (8.6) を適用すると，微小な電流  $I dz \mathbf{k}$  が作る磁界  $d\mathbf{B}$  は，微小な電流の位置から磁界を求める点へ向かう単位ベクトルを  $\mathbf{r}_0$  として，

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi R^2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_0 = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi R^2} \cos \theta \mathbf{e}_\phi$$

で与えられる． $z = r \tan \theta$  より  $dz = r d\theta / \cos^2 \theta$  となり，これと  $R \cos \theta = r$  を用いると，

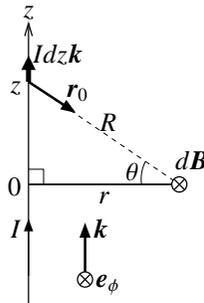


図 8.4 無限長直線電流が作る磁界の計算

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cos \theta d\theta \mathbf{e}_\phi$$

を得るので、

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi$$

となり、式 (8.2) と一致することがわかる。

## (2) 円電流

図 8.5 のように、原点を中心として半径  $a$  の  $xy$  平面上の円環上を流れる大きさ  $I$  の電流が中心軸である  $z$  軸上に作る磁界を求めよう。

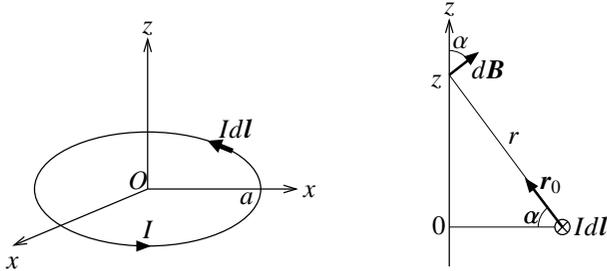


図 8.5 円電流が作る磁界の計算

ビオ-サバルの法則 (8.6) により、微小な電流  $I dz \mathbf{k}$  が座標  $z$  作る磁界  $d\mathbf{B}$  は、微小な電流の位置から磁界を求める点へ向かう単位ベクトルを  $\mathbf{r}_0$  として、

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \times \mathbf{r}_0$$

で与えられる。  $d\mathbf{B}$  は  $z$  軸に対して図 8.5(b) に示す角度  $\alpha$  をなす方向を向いており、これを円環全体で積分した場合は  $z$  軸と直行する成分は相殺され、  $d\mathbf{B}$  の大きさに  $\cos \alpha$  を乗じた  $z$  軸方向成分だけが残るので、磁界の大きさ  $B$  は、

$$B = \cos \alpha \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

となる。

## 12 群 - 4 編 - 8 章

## 8-2 アンペールの法則

(執筆者：來住直人) [2013 年 5 月 受領]

静電界では 6-4 節で述べたように電界  $E$  の線積分により電位を定義した。磁界  $B$  についても電位に対応する量の定義の可能性の検証のために、以下のような磁界の線積分を考える。

$$\phi_m = \int_A^B -\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

まずは図 8.6(a) の閉経路  $C_1$  を流れる大きさ  $I$  の電流が作る磁界  $B$  を考え、ピオ・サバルの法則 (8.6) より、点  $P$  の磁界について、

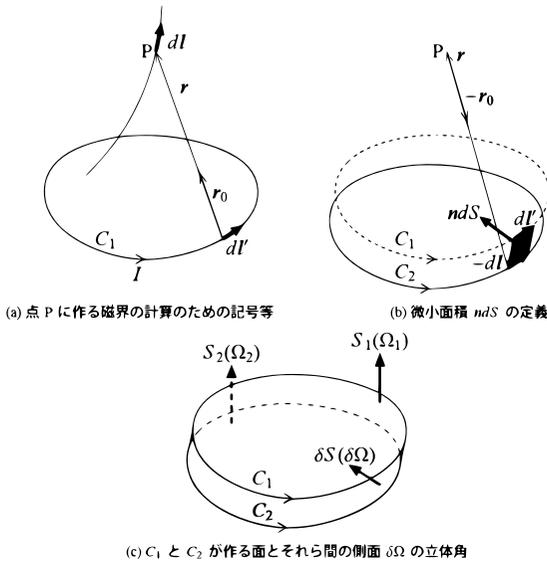


図 8.6 アンペールの法則の導出のための積分経路

$$-\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{-d\mathbf{l}' \times \mathbf{r}_0}{r^2} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}' \times (-d\mathbf{l}) \cdot (-\mathbf{r}_0)}{r^2}$$

を得る、ここで、図 8.6(b) より  $d\mathbf{l}' \times (-d\mathbf{l})$  は  $d\mathbf{l}'$  と  $\times(-d\mathbf{l})$  で作られ、単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を持つ微小面積  $ndS$  となるので、

$$-\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{-\mathbf{r}_0}{r^2} \cdot \mathbf{n} dS$$

と表される。この式の積分は図 8.6(b), (c) から、閉経路  $C_1$  とこれを  $-d\mathbf{l}$  平行移動した閉経

路  $C_2$  によって形成される帯状の微小面  $\delta S$  の点  $P$  から見た立体角  $\delta\Omega$  となるので、

$$-\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \delta\Omega = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (\Omega_1 - \Omega_2) \quad (8.10)$$

となる。 $\Omega_1$  と  $\Omega_2$  は、それぞれ閉経路  $C_1$  と  $C_2$  を周辺曲線とする面  $S_1$  と  $S_2$  の点  $P$  から見た立体角である。ただし、面の方向は、 $C_1$  と  $C_2$  の右ネジ方向を正としている。また、 $\Omega_2$  は、点  $P$  から距離  $dl$  離れた点から閉経路  $C_1$  を見た立体角とも解釈できるので、式 (8.10) を点  $A$  から点  $B$  を結ぶ経路で積分すると、

$$\int_A^B -\mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (\Omega_A - \Omega_B) \quad (8.11)$$

または

$$\int_A^B \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (\Omega_B - \Omega_A) \quad (8.12)$$

のように、点  $A, B$  から閉経路  $C_1$  を見た立体角  $\Omega_A, \Omega_B$  を用いて表現できる。これより電界  $E$  と同様に  $B$  の線積分の値も始点と終点のみに依存し、経路によらないために磁界も保存力場の場となるため、電位に対応する量が定義可能に見えるが、これは正しくない。このことは、図 8.7 のような平面上に存在する円環状の大きさ  $I$  の電流ループにおいて、式 (8.11) の積分を計算することで理解できる。図の太い横棒が電流ループの断面を示しており、図に示す電流の方向から定義される閉経路を周辺曲線とする面  $S$  の方向は下方を向いている。点  $A$  から図の  $C_{CW}$  を通って点  $B$  に向かう経路と、 $C_{CCW}$  を通って点  $B$  と同一で裏側の点  $B'$  に向かう経路の積分を計算する。点  $A$  から見た面  $S$  の立体角は  $0$  であり、面の方角を考慮すると点  $B$  から見た面  $S$  の立体角は  $2\pi$ 、点  $B'$  から見た面  $S$  の立体角は  $2\pi$  となる。したがって、式 (8.12) より、

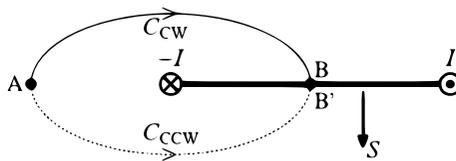


図 8.7 点  $A$  から  $B$  への 2 つの積分経路と電流ループ

$$\int_{C_{CW}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (\Omega_B - \Omega_A) = \mu_0 I / 2$$

$$\int_{C_{CCW}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (\Omega_{B'} - \Omega_A) = -\mu_0 I / 2$$

となり、面の方向に伴って終点における立体角の符号が異なる場合、線積分の値が経路に

依存することが分かる．これらより， $A \rightarrow B \rightarrow B' \rightarrow A$  と周回する閉経路  $C$  上の周回線積分について，

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (8.13)$$

を得る．これは，電流ループと閉経路  $C$  が鎖交する場合であり，それ以外の場合は周回線積分の値は 0 となる．

以上より，以下に示すアンペールの法則が成立する．

任意の閉経路  $C$  上の磁界  $\mathbf{B}$  の周回線積分の値は式 (8.13) で与えられる．ただし， $I$  は閉経路  $C$  に鎖交する電流の総和である．

6-3 節で取り上げた電界に関するガウスの法則には，6-5 節で示したような微分形が存在するように，アンペールの法則 (8.13) にも微分形が存在する．式 (8.13) において定義した閉経路  $C$  を周辺曲線とする任意の曲面  $S$  を考え，6-2 節に示した式 (??) のストークスの定理を適用し， $C$  に鎖交する電流  $I$ ，すなわち，面  $S$  を貫通する電流  $I$  を電流密度  $\mathbf{J}$  を用いて表現すると，

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot n dS = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot n dS$$

が成立する．この式は任意の面  $S$  について成立するので，

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (8.14)$$

これはアンペールの法則の微分形であり，式 (8.13) で表現される積分形と等価である．

アンペールの法則は任意の電流が作る磁界について成立するが，ガウスの法則と同様に幾何学的対称性の良い電流分布が作る磁界の計算に適用可能である．以下にアンペールの法則を用いた磁界の計算例を示す．

### (1) 無限長直線電流

ビオ・サバールの法則による計算と同様に図 8.4 で考える．対称性より磁界の大きさは  $z$  軸からの距離  $r$  のみの関数になり，磁界の方向は  $z$  軸に垂直な平面内の  $z$  軸中心の周回方向 ( $e_\phi$  方向) となる．閉経路  $C$  を  $z$  軸を中心として  $z$  軸に垂直な平面内にある半径  $r$  の円周全体とし， $C$  の方向は電流の右ネジ方向とすると，式 (8.13) において経路と  $\mathbf{B}$  は平行となり， $C$  上で  $\mathbf{B}$  の大きさ  $B$  は一定となるので，

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C B dl = B \oint_C dl = 2\pi r B = \mu_0 I$$

より，

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi$$

と，式 (8.2) とビオ・サバールの法則による計算結果と一致する．

(2) 無限長ソレノイド

ソレノイドは、円筒上に螺旋状に巻いたコイルのことで、図 8.8(a) のように円環状の電流が多層平行に連なった状態と解釈できる。単位長さ当たりのコイルの巻数が  $N$  の無限長ソレノイドが作る磁界を求めてみる。この磁界は、形状の対称性よりソレノイドの中心軸方向成分のみとなる。アンペールの法則を、図 8.8(b) に示すソレノイドの断面における矩形 ABCD で作られる閉経路に適用する。経路の方向は  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$  ととり、 $AB = CD = l$  とする。AB と DA 上においてはそれぞれ磁界の大きさは一定となり、BC と DA 上においては  $B \perp dl$  となり積分に寄与しないので、

$$\oint_{\text{ABCD}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = l(B_{\text{AB}} - B_{\text{CD}}) = \mu_0 NI$$

となる。ここで、 $B_{\text{AB}}$  と  $B_{\text{CD}}$  は、それぞれ AB、CD 上の磁界の大きさで、図の右方向を正としてある。

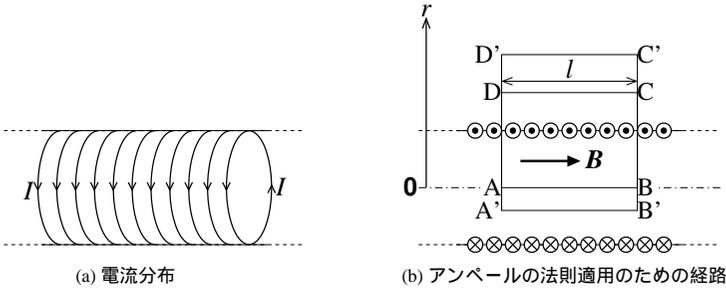


図 8.8 無限長ソレノイド

上記の積分は、矩形  $ABC'D'$  についても適用可能なので、

$$l(B_{\text{AB}} - B_{\text{CD}}) = l(B_{\text{AB}} - B_{\text{C'D'}}) = \mu_0 NI$$

を得る。これより  $B_{\text{CD}} = B_{\text{C'D'}}$  となり、ソレノイドの外部の磁界は一定となるが、 $C'D'$  で  $r \rightarrow \infty$  とすると、無限遠の磁界は 0 となることから  $B_{\text{C'D'}} \rightarrow 0$  であり、ソレノイドの外部の磁界は 0 となる。更に、アンペールの法則を矩形  $A'B'BA$  で適用すると、この閉経路に鎖交する電流はないので、

$$\oint_{\text{A'B'BA}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = l(B_{\text{A'B'}} - B_{\text{BA}}) = 0$$

となるため、ソレノイド内部の磁界は一定となり、

$$B = \mu_0 NI \tag{8.15}$$

となる。

(3) 半径  $a$  の円筒状無限長導体を軸方向に流れる一様な電流

半径  $a$  の円筒状導体を軸方向に総量  $I$  の一様な電流が流れているとする。導体の中心軸からの距離を  $r$  とすると、(1) と同様に対称性より磁界の大きさは中心軸からの距離  $r$  のみの関数になり、磁界の方向は中心軸に垂直な平面内の中心軸を中心とする周回方向となる。閉経路  $C$  を  $z$  軸を中心として  $z$  軸に垂直な平面内にある半径  $r$  の円周全体とし、 $C$  の方向は電流の右ネジ方向とすると、式 (8.13) において経路と  $\mathbf{B}$  は平行となり、 $C$  上で  $\mathbf{B}$  の大きさ  $B$  は一定となる。円筒内の電流密度は  $I/(\pi a^2)$  となるので、

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C B dl = B \oint_C dl = 2\pi r B = \begin{cases} \mu_0 \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \mu_0 I & (r < a) \\ \mu_0 I & (r > a) \end{cases}$$

を得る。したがって、磁界の大きさ  $B$  は以下の式で与えられる。

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} & (r < a) \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & (r > a) \end{cases}$$

## 12 群 - 4 編 - 8 章

## 8-3 ベクトルポテンシャル

(執筆者：來住直人)[2013年5月受領]

任意のベクトル場  $F$  は、

$$\nabla \cdot F = d(r) \text{ 及び } \nabla \times F = C(r)$$

を満たすスカラー場  $d(r)$  とベクトル場  $C(r)$  がわかれば、

$$F = -\nabla\Phi + \nabla \times \mathcal{A} \quad (8.16)$$

と記述することができる。ここで、 $\Phi$  と  $\mathcal{A}$  は、

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{d(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (8.17a)$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{C(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (8.17b)$$

を満たす。これをヘルムホルツの定理と呼び、 $F$  の記述に用いたスカラー場  $\Phi$  とベクトル場  $\mathcal{A}$  をそれぞれスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルと呼ぶ。

静電界にヘルムホルツの定理を適用すると、6-2 節の式(??)と6-5 節の(??)で示した関係により電位  $\phi$  がスカラーポテンシャルとなり、

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (8.18)$$

となるが、ベクトルポテンシャルは 0 なので不要となる。これを静電界に対するスカラーポテンシャルと呼ぶ。式(8.18)は、6-4 節の電位に対するクーロンの法則(??)を電荷密度  $\rho(r)$  の微小体積  $dV$  の微小電荷に適用し、重ね合わせの原理を用いて導いたものと同一となる。

電流が作る磁界  $B$  については式(8.9)より  $\nabla \cdot B = 0$  となるため、ヘルムホルツの定理を適用すると、スカラーポテンシャルは 0 なので不要となるが、アンペールの法則の微分形(8.14)より、

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (8.19)$$

とすると、

$$B = \nabla \times A \quad (8.20)$$

となるので、ここで定義した  $A$  が磁界  $B$  のベクトルポテンシャルとなることが分かる。以下に、電流が作る磁界のベクトルポテンシャルをいくつか求めてみる。

## (1) 有限長直線電流

図 8.9 に示すような  $z$  軸の  $[-l, l]$  に存在する  $+z$  方向の大きさ  $I$  の電流が作る磁界のベクトルポテンシャルは、電流が  $z$  軸方向成分のみなので、 $z$  軸方向となる。したがって、式 (8.19) は、

$$A(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{dz}{\sqrt{z^2 + r^2}} \mathbf{k} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log_e \frac{l + \sqrt{r^2 + l^2}}{r} \mathbf{k}$$

となる。

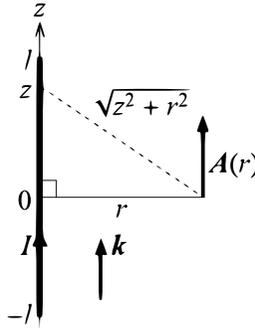


図 8.9 直線電流によるベクトルポテンシャルの計算

## (2) 無限長直線電流

これは (1) において  $l \rightarrow \infty$  とした場合になるが、 $|A(r)| \rightarrow \infty$  となるため、(1) の結果をそのまま適用できない。そこで、6-4 節で扱った無限長直線電荷が作る電位の定義と同様に、 $A(a) = 0$  となるように  $A(r)$  に適当なベクトルを加える。結果を示すと、

$$A(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \log_e \frac{a}{r} + \log_e \frac{l + \sqrt{r^2 + l^2}}{l + \sqrt{a^2 + l^2}} \right] \mathbf{k}$$

となる。この場合、 $|l| \rightarrow \infty$  で、

$$A(r) \rightarrow \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log_e \frac{a}{r} \mathbf{k}$$

となり、発散しなくなる。このようにベクトルポテンシャルにベクトルを加えて修正することの妥当性について考える。いま、もとのベクトルポテンシャル  $A$  にあるベクトル場  $a$  を加えて新たなベクトルポテンシャル  $A' = A + a$  を生成すると、これから計算される磁界  $B'$  は本来の磁界  $B$  と等しくあるべきなので、

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{B}$$

より、 $\nabla \times \mathbf{a} = 0$  となる必要がある。したがって、 $\mathbf{a} = \nabla \psi$  とすればよいので、

$$A' = A + \nabla\psi$$

のようなベクトルポテンシャルの定義をすれば  $B$  は不変となる。

### (3) 無限長ソレノイド

$z$  軸を中心とする半径  $a$  の円筒上に単位長当たりの巻数が  $N$  の無限長ソレノイドによるベクトルポテンシャル  $A$  を、図 8.10 に示すソレノイドの断面を参考に求める。ソレノイドの磁界は 8-2 節で求めたように、以下に示す中心軸からの距離  $r$  のみの関数となる。

$$B = \begin{cases} \mu_0 I k & (0 < r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

したがって、 $A$  も  $r$  のみの関数となり、方向については、積分の過程における相殺で、 $e_\varphi$

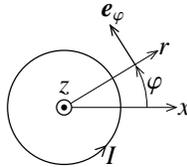


図 8.10 無限長ソレノイドの断面

方向のみとなる。図 8.10 の断面内の中心軸と同心の半径  $r$  の円を面  $S$  として、 $S$  上で  $B$  を面積分すると、ストークスの定理により  $S$  の周辺曲線の半径  $a$  の円の閉経路  $C$  上の線積分に変換され、 $C$  上では  $dl$  と  $A$  が平行になるので、

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{ndS} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{ndS} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r A$$

が成立する。一方、上記の  $B$  より、

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{ndS} = \begin{cases} \pi r^2 \mu_0 N I & (0 < r < a) \\ \pi a^2 \mu_0 N I & (r > a) \end{cases}$$

となるので、最終的に、

$$A = \begin{cases} \frac{r}{2} \mu_0 N I e_\varphi & (0 < r < a) \\ \frac{a^2}{2r} \mu_0 N I e_\varphi & (r > a) \end{cases}$$

を得る。 $B$  が 0 となるソレノイドの外部においても、ベクトルポテンシャル  $A$  が存在することに留意すべきである。

## 12 群 - 4 編 - 8 章

## 8-4 磁石と磁界

(執筆者: 來住直人) [2013 年 5 月受領]

前節までは、磁界の要因は電荷の移動を伴う電流であったが、本節では磁石による磁界を扱う。磁石間にかかる力である静磁気力は、静電気力の考え方と同様に「磁荷」という静磁気力の源によると解釈できる。この磁気力も、磁荷の存在による空間の性質の変化が原因と解釈できるので、磁荷により生成される磁界が定義できる。すなわち、磁荷量が  $q_{m1}$  と  $q_{m2}$  の、空間的な広がりが無視できる 2 つの点磁荷が距離  $r$  隔てて存在しているとき、磁荷量  $q_{m2}$  の磁荷にかかる静磁気力  $F_{m1 \rightarrow 2}$  は、 $q_{m1}$  から  $q_{m2}$  に向かう方向の単位ベクトルを  $r_0$  として、

$$F_{m1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\mu_0 r^2} \frac{q_{m1} q_{m2}}{r^2} r_0 \quad (8.21)$$

で与えられる。静磁気力も静電気力と同様な遠隔作用説に基づいており、これを近接作用説で解釈することで磁荷による静磁界が定義できる。式 (8.21) は、

$$F_{m1 \rightarrow 2} = \left( \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_{m1}}{r^2} r_0 \right) q_{m2} = q_{m2} H_1$$

と変形でき、カッコ内の量  $H_1$  を、 $q_{m1}$  が  $q_{m2}$  の位置に作る静磁界と解釈する。ただし、電流が作る磁界で扱った磁束密度  $B$  との混同を避けるために、ここで定義した磁荷が作る磁界  $H$  を「補助磁界」と記すこともある。補助磁界  $H$  は以下の 4 つの基本的な性質を持つ。

## (a) クーロンの法則

単一の磁荷量  $q_m$  点磁荷 (点電荷  $q_m$ ) が、点 P に作る静磁界 (補助磁界) は、式 (8.21) などにより、

$$H = \frac{q_m}{4\pi\mu_0 r^2} r_0 \quad (8.22)$$

$r$  は点磁荷から点 P までの距離、 $r_0$  は点磁荷と点 P を結ぶ直線に平行で点 P に向かう単位ベクトルである。

## (b) 重ね合わせの原理

任意の磁荷分布は点磁荷の重ね合わせで表現できるので、その磁荷分布が作る静磁界 (補助磁界) も点磁荷の作る磁荷の重ね合わせで表現できる。

## (c) ガウスの法則

静磁界 (補助磁界) に対しても 6-3 節の静電界で成立する式 (??) と同様のガウスの法則が成立する。すなわち、任意の閉曲面  $S$  上において  $H$  を面積分すると、

$$\int_S H \cdot ndS = \frac{Q'_m}{\mu_0} \quad (8.23)$$

となる。ここで、 $Q'_m$  は  $S$  内の磁荷の総和である。式 (8.23) には、電界  $E$  と同様に以下の微分形が存在する。ただし、 $\rho_m$  は磁荷密度である。

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\rho_m}{\mu_0} \quad (8.24)$$

## (d) 保存力の場合

静電界同様，静磁界（補助磁界）も保存力の場合となり，

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (8.25)$$

が成立する．これより，静磁界（補助磁界）に対しては，6-4 節で定義した静電界の電位 (??) に相当する磁位

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \int_O^P (-\mathbf{H}) \cdot d\mathbf{l} \quad (8.26)$$

が定義できる．これは静電界と同様に，

$$\mathbf{H} = -\nabla\phi_m \quad (8.27)$$

と表すこともできる．

補助磁界  $\mathbf{H}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  は以下の式で関係付けられている．

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (8.28)$$

これより，電流が作る磁界（磁束密度） $\mathbf{B}$  を補助磁界  $\mathbf{H}$  に換算することも可能だが，この補助磁界についてはアンペールの法則 (8.13) が成立することにより，式 (8.26) の磁位を定義することはできない．

磁界の成因は電流もしくは磁荷になるが，磁荷は常に正負の大きさの等しい磁荷の対である双極子の形態で存在し，単極磁荷，すなわち正または負の符号を持つ単一の磁荷は存在しない．電磁石のように導体線路に流れる伝導電流が作る磁界以外の，永久磁石などの磁石が作る磁界は，原子内の電子の運動やスピンなどの電荷の微視的な回転運動により発生しており，これは等価的には磁気双極子とみなすことができる．したがって，電流による磁界を含めて，磁界（磁束密度  $\mathbf{B}$ ）に関するガウスの法則 (8.8) が成立する．したがって，すべての磁石は磁気双極子の集まりと考えられるので，磁気双極子により磁石の作る静磁界が解析可能である．そこで，図 8.11 に示す磁気双極子が作る磁界の磁位を考える．図 8.11(a) に示すような，距離  $l$  を隔てて存在する大きさ  $q_m$  と  $-q_m$  の 2 つの点磁荷により形成される磁気双極子が点 P に作る磁位は，静電界における双極子の電位の式 (??) と同様に，大きさが  $q_m$  と  $l$  積で方向が負から正の点磁荷へ向かう方向の磁気双極子モーメントもしくは磁気双極子能率  $p_m$  を用いて，

$$\phi_m = \frac{\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r}_0}{4\pi\mu_0 r^2} \quad (8.29)$$

と表現できる．次に，これを用いることで，図 8.11(a) に示す面密度が  $P_m$  と  $-P_m$  の正負の

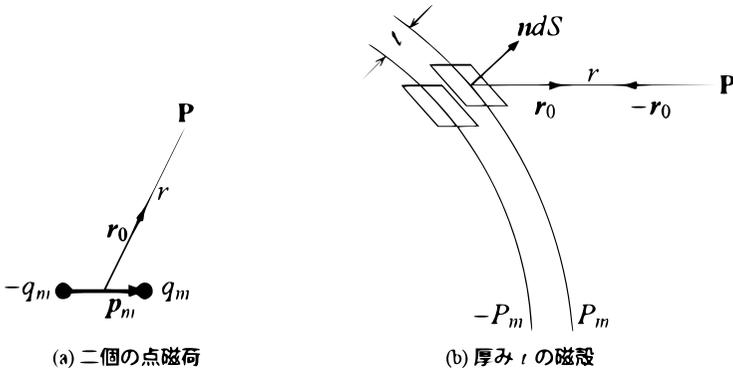


図 8.11 磁気双極子の作る磁位の計算

磁荷が両面に一様に分布している厚み  $t$  の磁殻が点  $P$  に作るの磁位  $\phi_m$  を求める．まずは 2 枚の磁殻の微小面積  $dS$  部分によって作られる磁位を求めると，式 (8.29) より，

$$d\phi_m = \frac{P_m t dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0}{4\pi\mu_0 r^2} = \frac{P_m t}{4\pi\mu_0} \left( -\frac{-\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n} dS}{r^2} \right) = \frac{P_m t}{4\pi\mu_0} (-d\Omega_P)$$

を得る．ここで， $d\Omega_P$  は微小面積  $dS$  を点  $P$  から見た立体角である．これより，磁殻全体が点  $P$  に作る磁位は，

$$\phi_m = \frac{P_m t}{4\pi\mu_0} (-\Omega_P) \quad (8.30)$$

となり，この磁殻全体を点  $P$  から見た立体角  $\Omega_P$  で表現できる．

以上を用いて，閉経路  $C$  を流れる大きさ  $I$  の電流ループがあるとき，これと同一の磁界を作る磁殻を求めることを考える．この電流ループと磁殻の作る磁界は同一のため，電流ループが作る磁界も保存力の場となると仮定するので，図 8.7 に示したような周回線積分の値が 0 とならない積分経路は考えないものとする．式 (8.26) で定義した磁位に式 (8.11) と (8.28) を適用することで，

$$\mu_0 \phi_m = \mu_0 \int_O^P (-\mathbf{H}) \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (\Omega_O - \Omega_P)$$

を得る．ここで，磁位の基準点  $O$  を無限遠にとると  $\Omega_O = 0$  となり，式 (8.30) より，

$$P_m t = \mu_0 I \quad (8.31)$$

が成立する．これより，図 8.12 に示すような電流の作る磁界と磁石の作る磁界の対応付けが可能となる．すなわち，閉経路  $C$  を流れる大きさ  $I$  の電流と，電流と同一の  $C$  を周辺曲線とするような磁殻は，以下の 2 条件下で等価となり，同一の静磁界を作る．ただし， $S$ ， $P_m$ ，

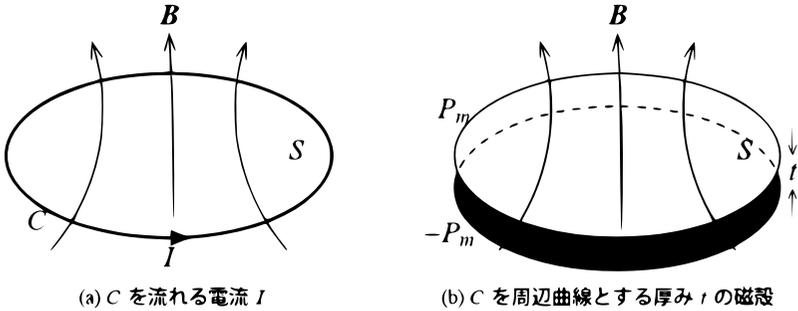


図 8.12 同一の磁界を作る電流と磁殻

$t$  は、それぞれ磁殻の表面積，表面磁荷の面密度の絶対値，磁殻の厚みである．

- ① 電流の向きと磁殻の双極子モーメントの方向が右ネジ関係にある．
- ② 磁殻の双極子モーメントの大きさが  $p_m = P_m t S = \mu_0 I S$  となる．

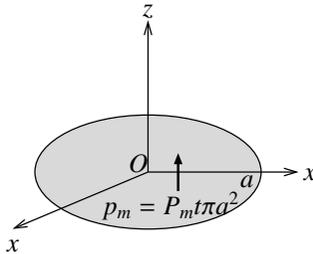


図 8.13 円盤状磁殻が作る磁界の計算

このような関係を満たす例として，図 8.13 に示す原点を中心として半径  $a$  の  $xy$  平面上に存在する円盤状の磁殻が  $z$  軸上に作る磁界を考える．この磁殻が  $z$  軸上の点  $(0, 0, z)$  に作る磁位は，式 (8.30) より，

$$\phi_m = \frac{P_m t}{4\pi\mu_0} (-\Omega)$$

となる． $\Omega$  は半径  $a$  の円盤の立体角で，

$$-\Omega = 2\pi \left( 1 - \frac{z}{z^2 + a^2} \right)$$

となるので，

$$\phi_m = \frac{P_m t}{2\mu_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right)$$

を得る。この結果を式 (8.27) に適用すると磁界が求められるが、形状の対称性より磁界は  $z$  軸方向成分  $H_z$  のみであり、この磁殻と等価な電流  $I$  で表すと、

$$H_z = -\frac{\partial\phi_m}{\partial z} = \frac{P_m t}{2\mu_0} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{Ia^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

となり、式 (8.28) より 8-1 節の (2) で計算した円電流が作る磁界と一致することが分かる。

## 12 群 - 4 編 - 8 章

## 8-5 磁性体

(執筆者：來住直人)[2013 年 5 月受領]

6-9 節においては、外部の電界により物質内に生じる正負の電荷の偏り、すなわち電気分極について扱った。類似の現象として、物質が外部の磁界によって磁気的な性質を帯びることがある。この現象を磁化と呼ぶ。磁化した物質中には外部磁界とは異なる磁界の源である磁気双極子モーメントが発生する。このように、磁化の生じる物質を磁性体と呼び、磁気双極子モーメントが発生することを磁気分極と呼ぶ。前節で扱った磁石は、磁化された磁性体とみなすことができる。

電気分極において分極の大きさを記述するために電気分極ベクトル  $P$  を定義したのと同様に、磁気分極の大きさを表す磁気分極ベクトル  $P_m$  を以下のように磁性体内の補助磁界  $H$  を用いて定義する。

$$P_m = \mu_0 \chi_m H = \mu_0 M \quad (8.32)$$

ここで、 $\chi_m$  は物質の磁化率もしくは磁気感受率と呼ばれる無名数（無次元の定数）であり、磁性体によって固有の値をとる。 $M$  は磁化である。磁気分極ベクトル  $P_m$  は、6-9 節で定義した電気分極ベクトル  $P$  と類似の性質を持つ。すなわち、以下が成立する。

- ①  $P_m$  の方向は正の磁荷の移動方向となり、 $H$  と平行になる。
- ②  $P_m$  の大きさは単位体積当たりの磁気双極子の大きさとなり、単位は [H/m<sup>2</sup>] である。

更に、磁気分極ベクトル  $P_m$  に関するガウスの法則、

$$\int_S P \cdot ndS = -Q_{pm} \quad (8.33)$$

が成立する。 $Q_{pm}$  は  $S$  内に含まれる分極磁荷の総量である。

磁気分極ベクトル  $P_m$  もしくは磁化  $M$  に対しては、誘電体における磁化率  $\chi_m$  の絶対値は多くの物質において 1 よりも十分小さい値をとる。 $\chi_m > 0$  の物質と  $\chi_m < 0$  の物質を、それぞれ常磁性物質、反磁性物質と呼ぶ。鉄のように  $\chi_m \gg 1$  となる物質を強磁性体と呼ぶ。強磁性体においては、式 (8.32) に示す線形性は成立しなくなる。図 8.14 に、強磁性体においてよく見られる磁気分極特性を示す。磁界の大きさ  $H$  を 0 から正方向に大きくしていくと、 $|H|$  が小さい場合に成立していた  $P_m$  と  $H$  間の比例関係が成立しなくなり状態 A では分極が飽和する。ここから  $H$  を小さくしていくと、 $H$  を 0 に戻しても状態 B のように磁気分極が 0 とならず、残留磁気分極が存在する。このように、磁気分極の値が  $H$  の値で一意的に決まるのではなく、その  $H$  の値に至るまでの履歴に依存する「ヒステリシス」が観測される。更に  $H$  を負にすると状態 C で磁気分極が 0 となり、その後は状態 D のように負の分極が飽和する。再び  $H$  を増加する、すなわち、 $H$  の絶対値を小さくしていくと、 $H = 0$  の状態 E では負の残留磁気分極が存在するヒステリシスが見られ、 $H$  を更に増加することで状態 A に戻る。

磁性体中の磁束密度は、誘電体における電束密度 (??) と同様に、

$$B = \mu_0 H + P_m \quad (8.34)$$

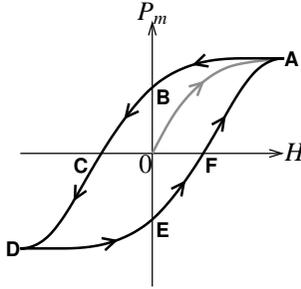


図 8.14 強磁性体の分極-磁界特性

と表される．この式の発散を計算すると，

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} + \nabla \cdot \mathbf{P}_m$$

となり，右辺は式 (8.23) と (8.33) を用いて計算できるが，すべての磁荷は分極磁荷なので，これらの項の磁荷は同一の分極磁荷  $Q_{pm}$  となり，

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \frac{Q_{pm}}{\mu_0} + (-Q_{pm}) = 0$$

より，磁性体内においても磁界に関するガウスの法則 (8.8) が成立することが分かる．

次に，磁性体におけるアンペールの法則について考える．8-1 節から 8-3 節で取り上げた磁界（磁束密度） $\mathbf{B}$  は，電流に基づいて定義されてきた．また，図 8.12 で見たように，磁石，すなわち磁化された磁性体を作る磁界は，それと等価な電流ループで実現できる．よって，磁石で作られる磁界が，そのような仮想的な電流によって生成されるとみなすことが可能となり，電流もしくは磁石を源とするすべての磁界が電流によって表現可能となる．ここで，磁石の作る磁界と同一の磁界を生成する等価的な電流を磁化電流と呼ぶ．図 8.15 に示す厚さ  $dl$  の一様な微小な円盤状の磁殻の場合は，磁気分極  $\mathbf{P}_m = \mu_0 \mathbf{M}$  を作るための磁化電流  $dI_m$  が円盤の側面を流れている． $dI_m$  は式 (8.31) より，

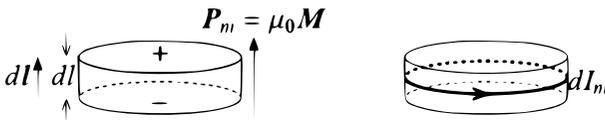


図 8.15 微小な磁殻の磁気分極を作る磁化電流

$$dI_m = \frac{P_m}{dl} = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \quad (8.35)$$

となる．

磁化電流は誘電体における分極電荷と類似の性質を持つ．すなわち，一樣に分極した誘電体表面に分極電荷は現れるが，その誘電体内部に分極電荷は存在しないように，一樣に磁化された磁性体においては磁化電流は図 8.15 のように磁性体の側面を流れるが，その内部では磁化電流が互いに相殺するために磁化電流は存在しない．また，磁化電流は 7 章で扱った電荷の空間的な移動を伴う電流のように外部に取り出すことはできない．一方，不均質な磁性体，すなわち磁化に空間的な不均一が存在する磁性体においては，磁性体内部を流れる局所的な磁化電流が存在する．図 8.16 のように磁性体内部に  $C$  を周辺曲線とする面  $S$  をとったとき， $S$  を貫く磁化電流に寄与する電流ループを考える．①から③の電流ループについては，面  $S$  をまたいでいるため電流が相殺され，求める磁化電流に寄与しない．したがって，④から⑦のように  $C$  と鎖交する電流ループが求める磁化電流に寄与する． $C$  と鎖交する電流ループ全体を，図 8.15 に示した微小な磁殻の集まりとみなせるので， $S$  を貫く磁化電流  $I_m$  は式 (8.35) とストークスの定理 (??) より，

$$I_m = \oint_C dl_m = \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{M} \cdot n dS \quad (8.36)$$

と表現できる．ここで  $S$  における磁化電流密度  $\mathbf{J}_m$  を用いると，

$$I_m = \int_S \mathbf{J}_m \cdot n dS$$

となることから，磁化電流密度  $\mathbf{J}_m$  は，

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (8.37)$$

と表現できる．

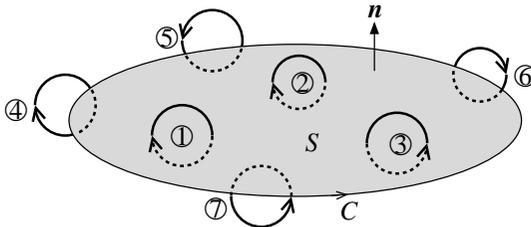


図 8.16  $C$  を周辺曲線とする面  $S$  を貫く磁化電流の計算の考え方

以上で扱った磁化電流を考慮すると，磁性体中におけるアンペールの法則 (8.13) は，

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I_e + I_m) \quad (8.38)$$

と記述できる．右辺第一項は電荷の空間的な移動を伴う電流のように外部に取り出すことのできる電流  $I_e$  に起因し，第二項が磁化電流の項である．この式の左辺は式 (8.32)，(8.34)，(8.36) より，

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \mu_0 I_m$$

と書き換えられる．したがって，補助磁界  $\mathbf{H}$  について，

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_e \quad (8.39)$$

が成立する．これを磁性体中におけるアンペールの法則，もしくは補助磁界  $\mathbf{H}$  に関するアンペールの法則と呼び，ストークスの定理により微分形

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e \quad (8.40)$$

も成立する．ここで， $\mathbf{J}_e$  は外部に取り出すことのできる電流密度である．

磁界（磁束密度） $\mathbf{B}$  に対するアンペールの法則の法則は，式 (8.38) のように外部に取り出すことのできる電流  $I_e$  と磁化電流  $I_m$  で記述されるのに対し，磁性体中における補助磁界  $\mathbf{H}$  に対するアンペールの法則は，式 (8.39) のように  $I_e$  のみで記述される．これは，6-9 節で示した電界  $\mathbf{E}$  に関するガウスの法則 (??) が，真電荷と分極電荷で記述されることに對し，誘電体に関する（電束密度  $\mathbf{D}$  に関する）ガウスの法則 (??) は真電荷のみで記述されることと比較することで，電界  $\mathbf{E}$  と磁界  $\mathbf{B}$  を主として用いる「 $\mathbf{E}$ - $\mathbf{B}$  対応」を採用する根拠と解釈することもできる．

## 12 群 - 4 編 - 8 章

## 8-6 磁性体の境界条件

(執筆者：來住直人)[2013 年 5 月受領]

6-10 節において、誘電率の異なる誘電体の境界における電界や電束密度の関係を明らかにしたが、それと同様に透磁率の異なる磁性体の境界の両側における磁界の関係を扱う。

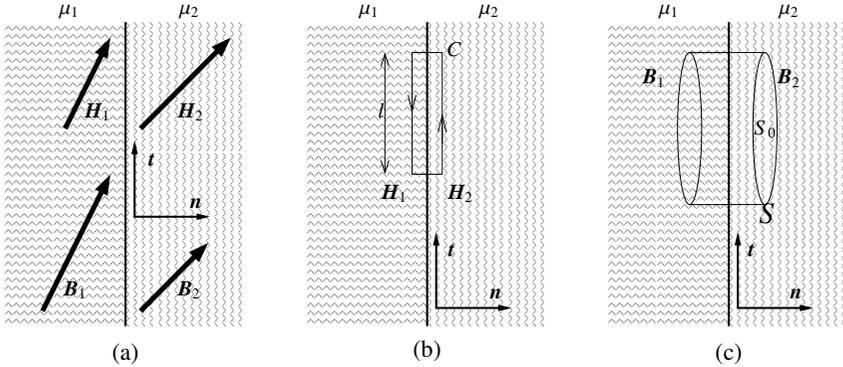


図 8.17 異なる磁性体境界面における境界条件の導出

図 8.17(a) のように透磁率  $\mu_1$  と  $\mu_2$  の磁性体が境界面を共有しており、それぞれの領域の補助磁界と磁束密度を  $H_i, B_i$  ( $i = 1, 2$  は領域の番号) とする。ベクトル  $t$  と  $n$  は、それぞれ境界面の単位接線ベクトルと単位法線ベクトルである。ただし、境界面に電流は存在しないと仮定する。境界面をまたぎ、長さ  $l$  の長辺が境界面に平行な薄い矩形の閉経路  $C$  を図 8.17(b) のようにとり、式 (8.39) の周回線積分を評価する。矩形の単辺が長辺  $l$  よりも十分小さく、長辺上における補助磁界の変化を無視すると、この周回線積分は、仮定より電流  $I_e = 0$  となることから、

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = -H_2 \cdot t l + H_1 \cdot t l = 0$$

となる。次に、図 8.17(c) における磁束密度  $B_1$  と  $B_2$  の関係を考える。境界面をまたぎ、底面積  $S_0$  の底面が境界面に平行な薄い円筒表面全体  $S$  において、誘電体に関するガウスの法則 (8.8) を適用する。円筒の高さと底面上における電束密度の変化を無視すると、

$$\int_S \mathbf{B} \cdot n dS = B_1 \cdot (-n) S_0 + B_2 \cdot n S_0 = 0$$

を得る。これらをまとめると、

$$t \cdot H_1 = t \cdot H_2 \quad (8.41a)$$

$$n \cdot B_1 = n \cdot B_2 \quad (8.41b)$$

となる。これらが、磁性体境界面における境界条件であり、境界面にける補助磁界の接線方向成分と磁束密度の法線方向成分が連続であることを意味し、6-10 節で示した誘電体における境界条件 (??) と (??) に対応している。