

12 群(電子情報通信基礎) - 4 編(力学・電磁気学)

3 章 弾性体と流体

(執筆者: 伊東敏雄)[2015 年 6 月受領]

概要

本章では固体の変形と流体(液体と気体)の運動を扱う。対象を連続体として扱うので連続体力学または変形体力学と呼ばれる分野である。

固体は任意の変形に対して抵抗するので、変形には仕事を必要とする。剛体は力を加えても全く変形しない固体であるので、連続体ではあるが連続体力学の対象とはしない。現実の物体は力をかけると変形するが、力がある限界内にあるならば力を取り去ると元の形に戻る。この性質を弾性といい、弾性を示す物体を弾性体という。力がある限界を超えると、力を取り去っても変形が残る。この性質を塑性という。実用上重要なのは弾性体の変形の特性である。

流体(液体または気体)は体積の変化に対しては抵抗するが、形の変化に対しては抵抗しない。このことは静止流体中では等方的な圧力が作用していることを意味する。流体の力学の主要な対象は流体の運動(流れ)である。運動している流体では通常、粘性抵抗が作用するが、流体の運動を扱うときには、圧力をかけても体積変化がなく、かつ粘性のない流体(非圧縮性完全流体)を考えることが多い。

本章では弾性体と流体の力学の初歩を述べる。

【本章の構成】

最初に物体の基本的な変形と物体内部に作用している力(応力)の定義を述べる(3-1 節)。次いで、引張り・圧縮による弾性体の変形(3-2 節)、ずれ応力による変形(3-3 節)を特徴づける弾性定数を定義し、変形している弾性体が蓄えている弾性エネルギーの式を導く(3-4 節)。典型的な変形の例としてたわみ(3-5 節)とねじれ(3-6 節)を取り上げる。

後半では、まず静止流体中における圧力(3-7 節)について考察する。次いで、運動する流体を記述する流速の場について述べ、質量保存則を表す連続の式を定常流の場合に与える(3-8 節)。更に、非圧縮性完全流体の定常流において成り立つベルヌーイの定理を導く(3-9 節)。最後に現実の流体が持つ粘性と流体中を運動する物体が受ける抵抗について調べる(3-10 節)。

3-1	ひずみと応力	3-7	静止流体中の圧力
3-2	伸び縮みと体積変化	3-8	流速の場
3-3	ずれ変形	3-9	ベルヌーイの定理
3-4	弾性エネルギー	3-10	粘性と抵抗
3-5	ねじれ	3-11	演習問題
3-6	たわみ		

12 群 - 4 編 - 3 章

3-1 ひずみと応力

(執筆者：伊東敏雄)[2015 年 6 月受領]

3-1-1 ひずみ

物体が力を受けて変形するとき、物体内部の微小部分が受ける変形を考える。基本的な変形に伸び・縮み、体積変化、ずれがある。変形の割合をひずみという。伸び・縮みに関しては、物体の長さ l が Δl だけ変化したとき、長さの変化の割合がひずみである。

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (3.1)$$

$\epsilon > 0$ は伸び、 $\epsilon < 0$ は縮みを意味する。体積変化に関しては、体積 V の変化 ΔV の割合がひずみである。

$$\epsilon = \frac{\Delta V}{V} \quad (3.2)$$

ずれとは図 3.1 のような変形である。上下の面に平行に逆向きの力をかけたときに生じる変形である。この場合には、AB の長さに対する BB' の長さの割合、すなわち角度 θ がひずみである。

$$\epsilon = \frac{BB'}{AB} = \theta \quad (3.3)$$

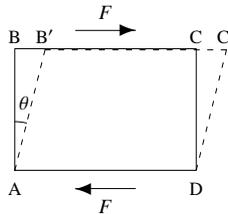


図 3.1 ずれ変形

弾性体の変形を扱う限り、ひずみは $\epsilon \ll 1$ であり、微小量に対する近似計算が適用できる*。例えば、金属の弾性限界のひずみは 0.1 ~ 0.4% である。

3-1-2 応力

物体の内部に微小面積を考え、その面の両側がその面で及ぼし合っている単位面積当たりの力を応力という。

断面積が一樣な棒を力 F で引っ張る場合を考えよう ($F < 0$ のときは圧縮)。棒に垂直な断面で棒を 2 つに分けたとすると、その断面には端に働く力と釣り合う力が作用している(図

* ϵ を微小量とすると、例えば c を定数として近似式 $(1 + \epsilon)^c \cong 1 + c\epsilon$ が利用できる。

3・2参照). 力の方向は断面に垂直で, 棒の断面積を S とすると単位面積当たりの力は

$$f = \frac{F}{S} \quad (3\cdot4)$$

である. この f を引張り応力という.

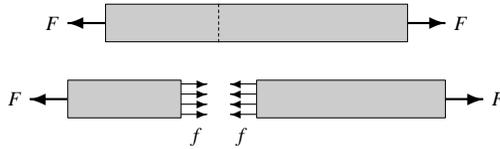


図 3・2 引張り応力 $f = F/S$ (S : 棒の断面積)

2 つに分けた面の法線方向が棒の軸方向と角度 θ をなす場合を考えよう (図 3・3 参照). 断面に作用する力は端に作用する力を打ち消す力であるが, 単位面積当たりの力は

$$\frac{F}{S/\cos\theta} = f \cos\theta \quad \text{ただし} \quad f = \frac{F}{S} \quad (3\cdot5)$$

である. この応力を面に垂直な方向と平行な方向に分けると, それぞれ

$$f_{\perp} = f \cos^2\theta \quad (3\cdot6)$$

$$f_{\parallel} = f \sin\theta \cos\theta \quad (3\cdot7)$$

である (図 3・4 参照). f_{\perp} を法線応力, f_{\parallel} を接線応力またはずれ応力という.

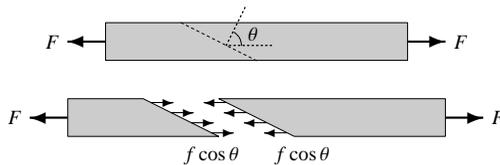


図 3・3 傾いた断面における引張り応力

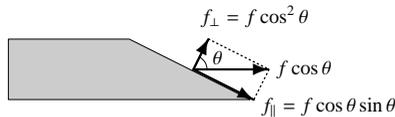


図 3・4 法線応力 f_{\perp} と接線応力 f_{\parallel}

12 群 - 4 編 - 3 章

3-2 伸び縮みと体積変化

(執筆者: 伊東敏雄)[2015 年 6 月 受領]

弾性体の特徴づける弾性定数(ヤング率, ポアソン比, 体積弾性率)の定義を与える.

3-2-1 ヤング率とポアソン比

物体に引張り応力をかけるとき, 応力がある限界(弾性限界)を越えなければ応力 f とひずみ ϵ は比例する.

$$f = E\epsilon \quad (3\cdot8)$$

この比例定数 E を物質のヤング率という. 通常の物体では, ある方向に引張って伸ばすと, それと垂直方向には縮む. 応力の方向のひずみを ϵ , それと垂直方向のひずみを ϵ' とするとき, その比は物質の定数である. 通常は ϵ と ϵ' の符号は逆なので, 両者の比のマイナスをとって

$$\sigma = -\frac{\epsilon'}{\epsilon} \quad (3\cdot9)$$

をポアソン比という.

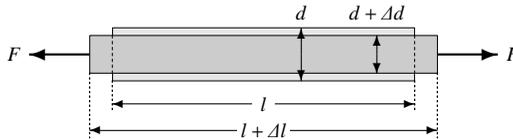


図 3-5 応力方向のひずみ $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ と応力に垂直方向のひずみ $\epsilon' = \frac{\Delta d}{d}$

3-2-2 体積弾性率

周囲から一様な圧力を受ける物体を考えよう. 圧力が p から $p + \Delta p$ になったとき体積が V から $V + \Delta V$ になったとする. 圧力が弾性限界を超えなければ Δp は $\Delta V/V$ に比例する.

$$\Delta p = -k \frac{\Delta V}{V} \quad (3\cdot10)$$

負号は, 圧力が増加するとき体積は減少することを考慮したものである. 比例係数 k を体積弾性率, $1/k$ を圧縮率という.

3-2-3 体積弾性率, ヤング率, ポアソン比の関係

体積弾性率とヤング率, ポアソン比は互いに無関係ではない. 各稜が x, y, z 軸に平行で, 稜の長さが l の立方体に圧力 Δp をかけたとしよう. z 軸に垂直な面にかかる圧力による z 軸

方向のひずみは $-\Delta p/E$, x 軸に垂直な面にかかる圧力による z 軸方向のひずみは $\sigma \Delta p/E$, y 軸に垂直な面にかかる圧力による z 軸方向のひずみも $\sigma \Delta p/E$, これらを加え合わせて x 軸方向のひずみは

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{\Delta p}{E} + 2\sigma \frac{\Delta p}{E} = -\frac{1-2\sigma}{E} \Delta p \quad (3 \cdot 11)$$

となる . x 方向 , y 方向のひずみも同じ式で与えられるので , 体積の変化率は

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(l + \Delta l)^3 - l^3}{l^3} \cong \frac{3\Delta l}{l} = -\frac{3(1-2\sigma)}{E} \Delta p \quad (3 \cdot 12)$$

となる . この式と体積弾性率の定義式 (3・10) を比べて , 次の関係式が成り立つことが分かる .

$$k = \frac{E}{3(1-2\sigma)} \quad (3 \cdot 13)$$

すべての物質は圧力を加えると体積は減少するので $k > 0$ である . したがって , ポアソン比は $\sigma < 0.5$ である . $\sigma = 0.5$ の場合には引張っても押し縮めても体積変化がないことを意味し , 柔らかいゴムがそれに近い . $\sigma = 0$ は引張っても横方向に伸び縮みがないことを意味し , コルクがそれに近い . 通常物質のポアソン比は 0.3 程度である .

12 群 - 4 編 - 3 章

3-3 ずれ変形

(執筆者: 伊東敏雄)[2015 年 6 月受領]

ずれ変形を特徴づける弾性定数は、ずれ弾性率(剛性率)である。

3-3-1 ずれ弾性率(剛性率)

直方体の上面と下面に、逆向きの接線応力 f を加えてずれ変形を与えよう。直方体が回転しないとすれば、上下の面の偶力のモーメントを打ち消すために、左右の面にも同じ大きさの接線応力が図 3・6 のように作用する。弾性変形においては、接線応力 f はずれひずみ(ずれ角) θ に比例する。

$$f = n\theta \quad (3\cdot14)$$

この比例定数 n をずれ弾性率または剛性率という。

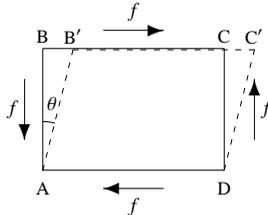


図 3・6 ずれ応力

3-3-2 ずれ弾性率, ヤング率, ポアソン比の関係

ずれ弾性率は、ヤング率, ポアソン比と無関係ではない。この関係を導こう。

稜の長さが l の立方体を考える。側面の対角線の長さは $\sqrt{2}l$ である。立方体の側面に図 3・7 のように接線応力 f をかけたときのずれ角を θ とすると、対角線 AC の長さは $\theta l / \sqrt{2}$ だけ長くなる。つまり、対角線の方向のひずみ(伸びの割合)は

$$\frac{\theta l / \sqrt{2}}{\sqrt{2}l} = \frac{\theta}{2} = \frac{f}{2n} \quad (3\cdot15)$$

である。 n はずれ弾性率である。

この立方体の中に図 3・7 のような直方体を考える。断面が PBQ の三角柱を考えると、力の釣り合いの条件から面 PQ には、面に垂直な応力 $-f$ (圧縮応力) が作用していることが分かる。同様に断面 SAP の三角柱を考えると、面 SP には面に垂直に応力 f (引張り応力) が作用している。したがって、PQ の方向 (AC の方向) のひずみは

$$\frac{f}{E} - \sigma \frac{-f}{E} = (1 + \sigma) \frac{f}{E} \quad (3\cdot16)$$

となる．2つの式(3・15)，式(3・16)を等しいと置いて次の結果を得る．

$$n = \frac{E}{2(1 + \sigma)} \quad (3 \cdot 17)$$

剛性率は常に正であるからポアソン比は $\sigma > -1$ である．すなわち，前節の結果 ($\sigma < 0.5$) とあわせて，ポアソン比は次の範囲にある．

$$-1 < \sigma < 0.5 \quad (3 \cdot 18)$$

通常の物質では $\sigma \geq 0$ であるが，ポアソン比が負の物質も可能である．負のポアソン比を示す稀な物質の例にクリストバライト（ケイ酸塩鉱物の結晶）がある．ハニカム型の特殊な人工構造体に負のポアソン比を示すものがある．

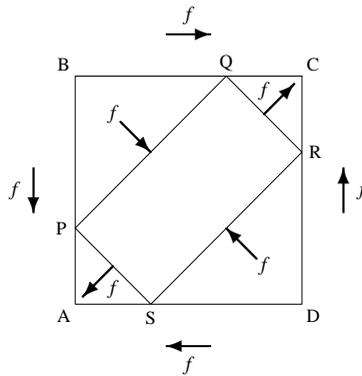


図 3・7 ずれ応力と引張り応力，圧縮応力

12 群 - 4 編 - 3 章

3-4 弾性エネルギー

(執筆者：伊東敏雄)[2015年6月受領]

弾性変形を起こすのに必要な仕事は弾性エネルギーとして弾性体内に蓄えられる。一般に、弾性体の単位体積当たりの弾性エネルギーは次の形に表される。

$$\frac{1}{2} \times (\text{弾性定数}) \times (\text{ひずみ})^2 \quad (3 \cdot 19)$$

3-4-1 伸び縮み

引張りによる変形(伸び)の場合を考えよう。ヤング率 E 、長さ l 、断面積 S の棒の一端を固定し、他端に力を加えるとす。棒が x だけ伸びているとき棒を引張っている力 $F(x)$ は

$$F(x) = E \frac{x}{l} S \quad (3 \cdot 20)$$

である。この状態から更に dx 伸ばすのに必要な仕事 dW は

$$dW = F(x) dx = \frac{ES}{l} x dx \quad (3 \cdot 21)$$

である。したがって、 $x = 0$ から $x = \Delta l$ まで伸ばすのに必要な仕事は

$$W = \frac{ES}{l} \int_0^{\Delta l} x dx = \frac{1}{2} \frac{ES}{l} (\Delta l)^2 \quad (3 \cdot 22)$$

と求まる。この仕事は弾性エネルギーとして弾性体内に蓄えられる。応力とひずみは弾性体内で一様であるとして、単位体積当たりの弾性エネルギー u は

$$u = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} E \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2 = \frac{1}{2} E \epsilon^2 \quad (3 \cdot 23)$$

である。ここで、 $V = Sl$ は弾性体の体積、 $\epsilon = \Delta l/l$ はひずみである。

3-4-2 体積変化

体積 V の物体が圧力 p を受けて、体積が V' になったとすると、体積弾性率を k として

$$p = -k \frac{V' - V}{V} \quad (3 \cdot 24)$$

である。この状態から更に圧力を加えて体積を dV' 変化させるのに必要な仕事 dW は ($dV' < 0$ であることに注意して)

$$dW = -p dV' = k \frac{V' - V}{V} dV' \quad (3 \cdot 25)$$

である。したがって、 $V' = V$ から $V' = V + \Delta V$ まで体積を変化させるのに必要な仕事は

$$W = k \int_V^{V+\Delta V} \frac{V' - V}{V} dV' = \frac{1}{2} k \left(\frac{\Delta V}{V} \right)^2 V \quad (3 \cdot 26)$$

である。したがって、単位体積当たりの弾性エネルギーは次式で与えられる。

$$u = \frac{1}{2} k \left(\frac{\Delta V}{V} \right)^2 \quad (3 \cdot 27)$$

3-4-3 ずれ変形

稜の長さ l の立方体の下面を固定し、上面に面に平行に力 F を加えてずれ変形を引き起こす。このときのずれ角を ϕ 、ずれ弾性率（剛性率）を n とすると、ずれ応力は $n\phi$ である。力 F は応力 $n\phi$ に面積 l^2 をかけて

$$F = n\phi l^2 \quad (3 \cdot 28)$$

である。ずれ角を更に $d\phi$ 大きくするとき、力の作用点は $l d\phi$ 移動するので、力のなす仕事 dW は

$$dW = F l d\phi = n l^3 \phi d\phi = nV \phi d\phi \quad (3 \cdot 29)$$

である。ここで、 $V = l^3$ は立方体の体積である。ずれ角を $\phi = 0$ から $\phi = \theta$ まで変化させるのに必要な仕事は

$$W = nV \int_0^\theta \phi d\phi = \frac{1}{2} n\theta^2 V \quad (3 \cdot 30)$$

である。単位体積当たりの弾性エネルギーは次式で与えられる。

$$u = \frac{1}{2} n\theta^2 \quad (3 \cdot 31)$$

12 群 - 4 編 - 3 章

3-5 ねじれ

(執筆者：伊東敏雄)[2015 年 6 月 受領]

円柱形の物体をねじることによって生じる変形をねじれという。ねじれに伴う変形はずれ変形であるが、弾性体内でずれ応力は一様ではない。

3-5-1 ねじれのモーメント

剛性率 n 、半径 a 、長さ l の一様な直円柱の上端を固定し、下端の底面に軸周りの力のモーメントを加えて角度 ϕ だけねじるときに円柱内部に生じる応力を調べよう。円柱側面におけるずれ角 θ_0 は $a\phi/l$ である (図 3・8(a) 参照)。円柱の軸から距離 r のところにおけるずれ角 $\theta(r)$ は次の式で与えられる。

$$\theta(r) = \frac{a\phi}{l} \cdot \frac{r}{a} = \frac{\phi}{l} r \quad (3 \cdot 32)$$

このずれ角に対応するずれ応力 $f(r)$ は

$$f(r) = n\theta(r) = \frac{n\phi}{l} r \quad (3 \cdot 33)$$

である。底面の半径 $r \sim r + dr$ の細い環状部分のずれ応力が与える力のモーメント dN は

$$dN = 2\pi r dr f(r) \times r = 2\pi n \frac{\phi}{l} r^3 dr \quad (3 \cdot 34)$$

と表される (図 3・8(b) 参照)。全底面に作用する力のモーメント N は次の式で与えられる。

$$N = 2\pi n \frac{\phi}{l} \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi n a^4}{2l} \phi \quad (3 \cdot 35)$$

この N が、円柱を角度 ϕ だけねじるのに必要な力のモーメントである。半径の 4 乗に比例することに注目しよう。

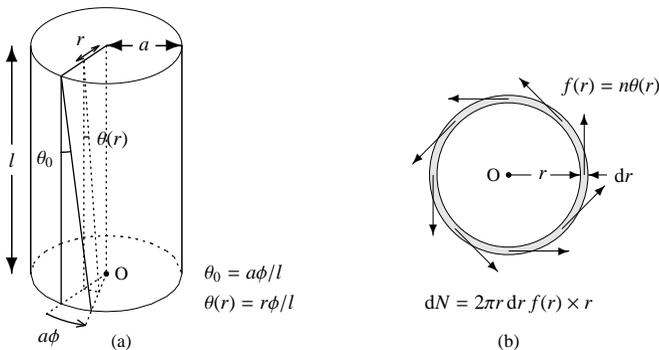


図 3・8 円柱のねじれ (a) ずれ角 θ , (b) 環状部分の力のモーメント

3-5-2 ねじれ振動

針金の上端を固定し、下端に慣性モーメント I の回転体を吊るし、小さな角だけねじって放すと、回転体は回転振動をする。回転体の回転角（針金のねじれ角）を ϕ とすると、回転体には式 (3・35) で与えられる力のモーメントが角度 ϕ を小さくする向きに働くから、次の運動方程式を得る。

$$I \frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{\pi n a^4}{2l} \phi \quad (3\cdot36)$$

これより、振動の周期 T は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2I}{\pi n a^4}} \quad (3\cdot37)$$

と求まる。このような装置をねじれ振り子といい、剛性率や慣性モーメントの測定に利用される。



図 3・9 ねじれ振り子

3-5-3 ばね

ばねを“伸ばす”ということは、ばねを作っている針金をねじることである（図 3・10 参照）。全長 l 、半径 a の針金を巻き半径 R で巻いたバネを考えよう。このばねを力 F で引張ることは、力のモーメント FR を加えて針金をねじることを意味する。したがって、ねじれ角を ϕ とすると次の式が成り立つ。

$$\frac{\pi n a^4}{2l} \phi = FR \quad (3\cdot38)$$

針金を ϕ ねじったとき力の作用点は $x = R\phi$ だけ移動する。これがばねの“伸び”にほかならない。 F と x の関係は

$$F = \frac{\pi n a^4}{2R^2 l} x \equiv kx \quad (3\cdot39)$$

である。この比例定数がばね定数 k である*。巻きのピッチが R に比べて十分に小さい場合

* 体積弾性率の k と混同しないこと。

には、巻き数を N とすると針金の長さは $l \cong 2\pi RN$ であるから、バネ定数 k は次の式で与えられる。

$$k = \frac{na^4}{4R^3N} \quad (3 \cdot 40)$$

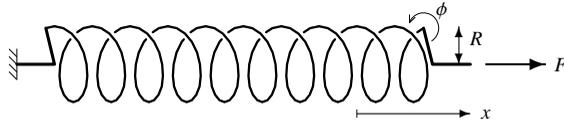


図 3・10 バネを x 引張ることは針金を角度 $\phi = x/R$ ねじることである。 R は針金の巻き半径。

12 群 - 4 編 - 3 章

3-6 たわみ

(執筆者：伊東敏雄)[2015 年 6 月 受領]

棒や板を曲げると湾曲の外側は伸び，内側は縮む．曲げに伴う変形も弾性体内で引張り応力は一様ではない．

3-6-1 曲げモーメント

曲げ変形を受けて湾曲している棒の（軸方向の）微小部分を考える（図 3・11 参照）．外側部分は伸び，内側部分は縮むので，その境界に伸び縮みのない中立面と呼ばれる面が存在する．中立面の曲率半径を R ，微小部分が曲率中心に関して張る角度を $\Delta\theta$ とする．また，棒に垂直な断面において，中立面との交線を ξ 軸にとり，それに垂直に η 軸を図 3・11 のようにとる． $\eta > 0$ の領域は伸び， $\eta < 0$ の領域は縮みの変形を受けている．中立面から距離 η 離れた湾曲面の曲率半径は $R + \eta$ であるから，この湾曲面上における棒の軸方向のひずみは

$$\epsilon(\eta) = \frac{(R + \eta)\Delta\theta - R\Delta\theta}{R\Delta\theta} = \frac{\eta}{R} \quad (3\cdot41)$$

である．したがって，軸方向の応力は

$$f(\eta) = E\epsilon(\eta) = \frac{E\eta}{R} \quad (3\cdot42)$$

である．棒に作用する力は曲げを起こす力のみで，棒を伸ばしたり縮めたりする軸方向の力は受けていないとすれば， $f(\eta)$ を断面にわたって積分した結果は

$$\int f(\eta) d\xi d\eta = 0 \quad (3\cdot43)$$

である．この関係式が断面の形状を与えたときの中立面の位置を決定する．断面の ξ 軸の周りの力のモーメント N を求めよう．

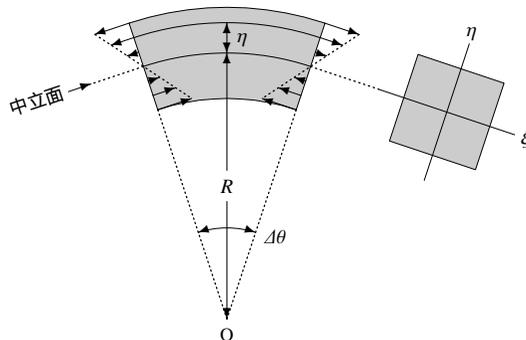


図 3・11 曲げ変形している断面に作用する応力

$$N = \int \eta f(\eta) d\xi d\eta = \frac{E}{R} \int \eta^2 d\xi d\eta \equiv \frac{EI}{R} \quad (3\cdot44)$$

N を曲げモーメントという．ここで

$$I = \int \eta^2 d\xi d\eta \quad (3\cdot45)$$

は断面の形状だけで決まる量で，断面の 2 次モーメントと呼ばれる．

長方形と円の場合に断面の 2 次モーメントを求めておく．

- 長方形断面の 2 次モーメント

$$I = \int_{-b/2}^{b/2} \eta^2 d\eta \int_{-a/2}^{a/2} d\xi = \int_{-b/2}^{b/2} a\eta^2 d\eta = \frac{1}{12}ab^3 \quad (3\cdot46)$$

- 円形断面の 2 次モーメント

$$I = \int_{-a}^a \eta^2 d\eta \int_{-\sqrt{a^2-\eta^2}}^{\sqrt{a^2-\eta^2}} d\xi = \int_{-a}^a 2\eta^2 \sqrt{a^2-\eta^2} d\eta = \frac{\pi}{4}a^4 \quad (3\cdot47)$$

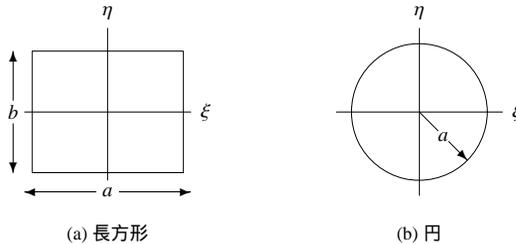


図 3・12 長方形，円の断面の 2 次モーメントの計算

3-6-2 たわみ

一端をしっかりと固定した水平な板の先端に荷重をかけると棒は曲がる．板が長い場合には外から荷重をかけなくても自分自身の重さで曲がる．このような変形をたわみという．板がどのように曲がるか，また先端の降下量がどのくらいか調べよう．

板のヤング率を E ，長さを l ，質量を M ，断面の 2 次モーメントを I とする．また，先端に載せたおもりの質量を m ，重力加速度を g とする．固定端から x の距離にある断面で板を分け，それより右側の長さ $l-x$ の部分に対して釣り合いの条件を適用する（図 3・13 参照）．鉛直方向（ y 軸と取る）に作用する力は，力の釣り合いを考慮して，図 3・13 のようになる．考えている部分の自重 $(l-x)Mg/l$ は重心に作用すると考えればよい．断面と中立面の交線の周りに，力のモーメントの釣り合いを考えよう．断面の曲げモーメント $N (= EI/R)$ は荷重と自重のモーメントの和に等しいから次式を得る．

$$\frac{EI}{R} = mg(l-x) + \frac{(l-x)Mg}{l} \frac{l-x}{2} = mg(l-x) + \frac{(l-x)^2}{2l} Mg \quad (3\cdot48)$$

したがって、中立面の曲率半径 $R(x)$ は次式を満たす。

$$\frac{1}{R} = \frac{mg}{EI}(l-x) + \frac{Mg}{2lEI}(l-x)^2 \quad (3\cdot49)$$

板の中立面の形を表す曲線を $y = y(x)$ とすると、曲率半径 $R(x)$ は次式で与えられる。

$$\frac{1}{R} = \frac{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{3/2}} \quad (3\cdot50)$$

板が弾性限界内でたわんでいる場合には、微分係数は $|dy/dx| \ll 1$ であるので分母は 1 としてよい。曲線は上に凸であるので式 (3\cdot49) から

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{mg}{EI}(l-x) + \frac{Mg}{2lEI}(l-x)^2 \quad (3\cdot51)$$

を得る。積分して $x = 0$ で $y = 0$, $dy/dx = 0$ となるように定数を決めると次式を得る。

$$y = -\frac{mg}{6EI}(3l-x)x^2 - \frac{Mg}{24lEI}(6l^2 - 4lx + x^2)x^2 \quad (3\cdot52)$$

先端の降下量 h は、 $x = l$ のときの $|y|$ であるから

$$h = \frac{mgl^3}{3EI} + \frac{Mgl^3}{8EI} \quad (3\cdot53)$$

と求まる。

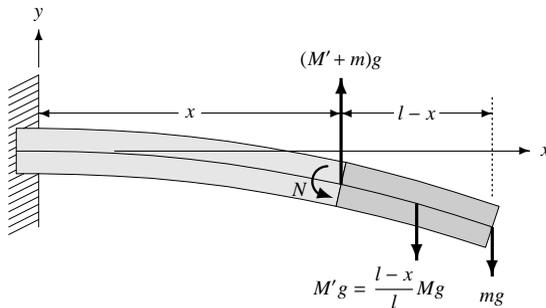


図 3\cdot13 たわみ

12 群 - 4 編 - 3 章

3-7 静止流体中の圧力

(執筆者：伊東敏雄)[2015 年 6 月 受領]

気体と液体を流体と総称する．静止流体中における応力は圧縮応力のみである．

3-7-1 静水圧

静止流体中においては接線応力（ずれ応力）は存在せず，圧縮応力のみである．圧縮応力の大きさは考える面の向きには依存しないことを示そう．流体中に図 3・14 のような微小な四面体を考える．面 ABC に作用する圧縮応力を p ， x, y, z 軸に垂直な各面に作用する圧縮応

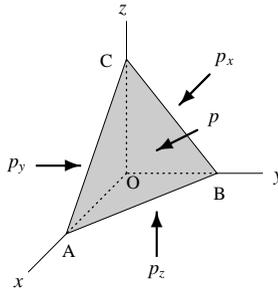


図 3・14 四面体の各面に作用する力の釣り合い

力をそれぞれ p_x, p_y, p_z とする．また，4 つの面の面積をそれぞれ S, S_x, S_y, S_z とし，面 ABC の外向き法線方向の方向余弦を $(\cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z)$ とする．力の釣り合いの条件より次の関係を得る（微小な 4 面体を考えているので，内部の流体の受ける重力は無視する）．

$$pS \cos \theta_x = p_x S_x, \quad pS \cos \theta_y = p_y S_y, \quad pS \cos \theta_z = p_z S_z \quad (3\cdot54)$$

ここで， $S_x = S \cos \theta_x$ ， $S_y = S \cos \theta_y$ ， $S_z = S \cos \theta_z$ の関係があるので，次の結果を得る．

$$p = p_x = p_y = p_z \quad (3\cdot55)$$

このように，考える面の向きによらない等方的な圧縮応力を静水圧あるいは単に圧力という．

通常，流体中に作用する応力は圧縮応力（圧力）であるが，液体においては引張り応力（負の圧力）もありうる．液体をピストンに入れてピストンを引張ると液体はある程度まで引き裂かれることに抵抗する．

3-7-2 圧力の高度変化

一様な重力場において静止している流体内で，圧力が高さとともにどのように変わるか調べよう．鉛直な管内の流体を考える．上方に z 軸をとり，高さが $z \sim z + dz$ の間の流体の釣り合いを考える．流体が下面から受ける力は pS ，上面から受ける力は $(p + dp)S$ ，この部分の流体が受ける重力は流体の密度を ρ とすると $\rho g S dz$ であるから，釣り合いの条件式は

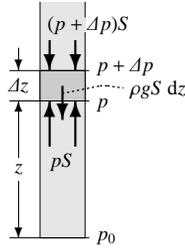


図 3・15 鉛直方向の圧力変化

$$(p + dp)S + \rho g S dz = pS \quad (3\cdot56)$$

である。したがって、次の関係を得る。

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (3\cdot57)$$

密度を一定と考えてよければ $z = 0$ における圧力を p_0 として、次の結果を得る。

$$p(z) = p_0 - \rho g z \quad (3\cdot58)$$

密度が一定の流体を非圧縮性流体という。液体は通常は非圧縮性と近似できる。

気体の場合には密度は圧力と温度に依存する。理想気体の場合には状態方程式 $pV = (m/m_0)RT$ より、その密度は

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_0 p}{RT} \quad (3\cdot59)$$

と表される。ただし、 V は気体の体積、 m は質量、 m_0 は 1 モル当たりの質量、 T は絶対温度、 R は気体定数である。この関係を式 (3・57) に代入して

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{m_0 g}{RT} p \quad (3\cdot60)$$

を得る。温度は高度によらず一定であると仮定すれば、 $z = 0$ において $p = p_0$ となるように定数を決めて次の結果を得る。

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{m_0 g}{RT} z\right) \quad (3\cdot61)$$

圧力の国際単位はパスカル (pascal, 記号 Pa, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$) であるが、圧力は実生活とも関わりが深いのでいろいろな単位がある。

- 1 atm (気圧) = $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$: 水銀柱 760 mm の高低差に相当する圧力。標準大気圧。
- $1 \text{ torr} = 133.3 \text{ Pa}$: 水銀柱 1 mm の高低差に相当する圧力。血圧の単位。
- $1 \text{ kgw/cm}^2 = 0.98 \times 10^5 \text{ Pa}$: 機械工学などの分野で使われる。

12 群 - 4 編 - 3 章

3-8 流速の場

(執筆者：伊東敏雄)[2015 年 6 月 受領]

3-8-1 流速の場

流体の運動を調べるには、流れている流体の微小部分に着目して、その部分の運動を時間的に追跡する方法もあるが、それよりも、空間のある微小体積に着目して、その点における流体の速度や圧力の時間変化を求める方法が一般的である。この場合には流体の速度ベクトルを位置座標 (x, y, z) と時刻 t の関数として $V(x, y, z, t)$ のように表すことができる。時刻 t も位置座標の x, y, z と対等の変数であることに注意されたい。流体の速度をこのように記述した空間を流速の場という。

流速ベクトル V が x, y, z だけの関数で t に依存しないとき、その流れを定常流という。

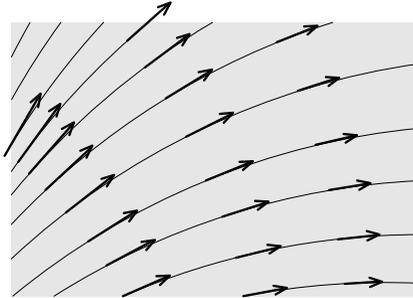


図 3-16 流速の場

3-8-2 流線と流管

流速の場はベクトル場である。流速の場を視覚化するには、線上の各点における接線がその点における V の方向と一致するような曲線を用いる。このような曲線を流線という。定常流の場合には流線は時間的に変化せず、実際に流体が流れていく経路を表している。この場

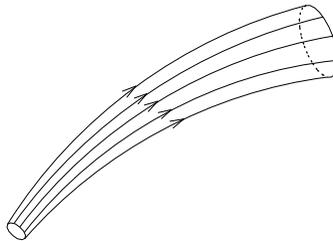


図 3-17 流線と流管

合には流線に沿った座標を導入すると 1 次元の流れとして扱うことができる．非定常流においては流線は時々刻々と変化し，流体粒子が流れていく経路とは一致しない．

定常流の流れの方向にほぼ垂直な平面内に閉曲線を考えと，その閉曲線上のすべての点を通る流線は仮想的な管を形成する．このような管を流管という．この管内の流体は管外へ出ることはないから，管内の流体の流れはあたかも境界壁に囲まれていると同様に扱うことができる．

3-8-3 連続の式

定常流の中に 1 つの細い流管を考え，断面 A, B で区切られた部分に着目する（図 3・18 参照）．ある瞬間に A, B を通過した流体が微小時間 Δt の後にそれぞれ A', B' に到達したとする．定常流であるので AB 間の流体の質量は一定に保たれるから，断面 A から流入した流体の質量は断面 B から流出した流体の質量に等しいはずである．A, B における流管の断面積を S_A, S_B ，流体の速さを V_A, V_B ，密度を ρ_A, ρ_B とすると，流入した質量は $\rho_A S_A V_A \Delta t$ ，流出した質量は $\rho_B S_B V_B \Delta t$ であるから，両者を等しいと置いて

$$\rho_A S_A V_A \Delta t = \rho_B S_B V_B \Delta t \quad (3 \cdot 62)$$

A と B は流管の任意の 2 点であるから，一般に流管に沿って $\rho S V$ は一定であることが分かる．

$$\rho S V = \text{一定} \quad (3 \cdot 63)$$

この式を連続の式という．非圧縮性流体の場合には ρ は一定なので $S V = \text{一定}$ となる．

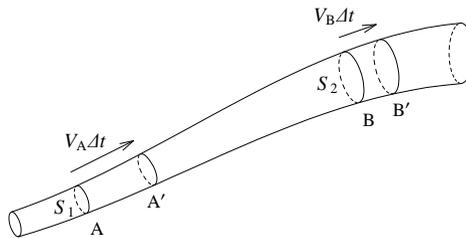


図 3・18 連続の式

12 群 - 4 編 - 3 章

3-9 ベルヌーイの定理

(執筆者：伊東敏雄)[2015 年 6 月 受領]

非圧縮性流体の定常流で成り立つベルヌーイの定理はいろいろな場面で応用できる。

3-9-1 ベルヌーイの定理

静止流体中では接線応力（ずれ応力）は存在しないが、運動する流体中では接線応力が作用する。流体中の接線応力は流れに対する抵抗を与える。この現象を粘性という。粘性は流体の内部摩擦現象である。しかし、簡単のために、流体の運動を考えるとときに粘性のない流体を考えたことが多い。粘性のない理想化した流体を完全流体という。以下では非圧縮性の完全流体が定常的に流れている流速の場で成り立つ有用な定理を導く。

流管の断面 A, B で区切られた部分に着目して、この部分に微小時間 Δt の間に出入りするエネルギーについて調べよう。

A, B における流管の断面積を S_A, S_B 、流体の速さを V_A, V_B とすると、流入した質量は $\rho S_A V_A \Delta t$ 、流出した質量は $\rho S_B V_B \Delta t$ である。非圧縮性流体を考えているので密度 ρ は一定である。流入した流体の運動エネルギーから流出した流体の運動エネルギーを差し引いた運動エネルギーの増加は

$$\frac{1}{2}(\rho S_A V_A \Delta t) V_A^2 - \frac{1}{2}(\rho S_B V_B \Delta t) V_B^2 \quad (3 \cdot 64)$$

である。鉛直上方に z 軸をとり、A, B の z 座標をそれぞれ z_A, z_B とすると、流入した流体の重力による位置エネルギーから流出した流体の位置エネルギーを差し引いた位置エネルギーの増加は

$$(\rho S_A V_A \Delta t) g z_A - (\rho S_B V_B \Delta t) g z_B \quad (3 \cdot 65)$$

である。エネルギーの収支を考えるには、流体になされた仕事も考慮しなければならない。流管の側面に作用する力は、完全流体の場合には面に垂直、すなわち運動方向に垂直である

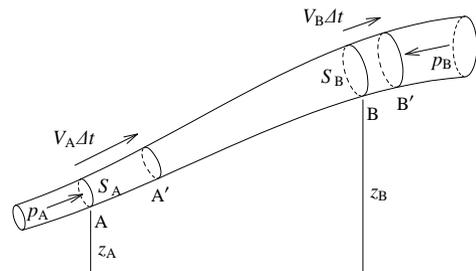


図 3-19 ベルヌーイの定理

から、仕事をしない。仕事をするのは断面 A, B に垂直に作用する力である。A, B における圧力を p_A, p_B とすると、各断面に垂直に作用する力は $p_A S_A, p_B S_B$ 、力の方向に移動した距離は $V_A dt, V_B dt$ であるので、微小時間の間になされた仕事は差し引き

$$p_A S_A V_A dt - p_B S_B V_B dt \quad (3 \cdot 66)$$

である。定常流を考えているので AB 間のエネルギーの出入りは 0 であるから、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\rho S_A V_A dt) V_A^2 - \frac{1}{2}(\rho S_B V_B dt) V_B^2 \\ & + (\rho S_A V_A dt) g z_A - (\rho S_B V_B dt) g z_B \\ & + p_A S_A V_A dt - p_B S_B V_B dt = 0 \end{aligned} \quad (3 \cdot 67)$$

連続の式により $S_A V_A = S_B V_B$ であることに注意して、全体を $S_A V_A dt (= S_B V_B dt)$ で割って次式を得る。

$$\frac{1}{2} \rho V_A^2 + \rho g z_A + p_A = \frac{1}{2} \rho V_B^2 + \rho g z_B + p_B \quad (3 \cdot 68)$$

A, B は流管上の任意の 2 点であるから、1 本の流線に沿って

$$\frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g z + p = \text{一定} \quad (3 \cdot 69)$$

という関係が得られる。これをベルヌーイの定理という。 $\rho V^2/2$ は圧力の次元を持ち、動圧と呼ばれる。これに対して p を静圧という。

3-9-2 トリチェリの式

液体をたたえた容器の下部の小さな孔（オリフィス）から流出する液体の速さを求めよう。流線は図のようになる。液面を A、孔を通過した直後に流線が平行になった断面を B とする。ベルヌーイの定理の式 (3・68) において p_A, p_B は大気圧 p_0 に等しい。また、穴は小さいとすれば $V_A = 0$ と置くことができるので

$$\rho g z_A + p_0 = \frac{1}{2} \rho V_B^2 + \rho g z_B + p_0 \quad (3 \cdot 70)$$

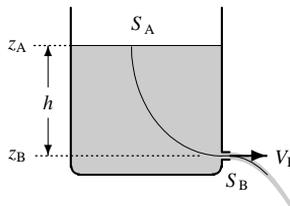


図 3・20 トリチェリーの式

液面と孔の位置の高低差を $h = z_A - z_B$ とすると、流出する液体の流速 V_B は

$$V_B = \sqrt{2gh} \quad (3\cdot71)$$

である。この関係式をトリチェリの式という。

3-9-3 ベンチュリ管

流路を徐々に絞って、その入り口部と絞り部における圧力差から管路内の流量を求める装置をベンチュリ管という。入り口部 1 と絞り部 2 の断面積を S_1, S_2 、流速を V_1, V_2 、圧力を p_1, p_2 とする。管は水平であるとしてベルヌーイの定理を適用すると

$$\frac{1}{2}\rho V_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 + p_2 \quad (3\cdot72)$$

を得る。この式と非圧縮性流体に対する連続の式

$$S_1 V_1 = S_2 V_2 \quad (3\cdot73)$$

を連立させて V_2 を消去して V_1 を求めると次の結果を得る。

$$V_1 = \frac{S_2}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \quad (3\cdot74)$$

単位時間あたりに流れる体積 Q は次の式で与えられる。

$$Q = S_1 V_1 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}} \quad (3\cdot75)$$

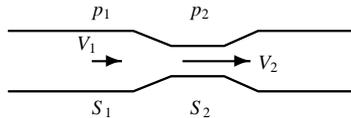


図 3・21 ベンチュリ管

3-9-4 ピトー管

一様な流れの中に図 3・22 のような細い管を流れに平行に挿入して流速を求める装置をピトー管という。管の前面中央に到る流れはせき止められ流速は 0 となるが、管の周りの流れはほとんど乱されない。流れが止められた点の圧力 p はベルヌーイの定理により

$$p = \frac{1}{2}\rho V^2 + p_0 \quad (3\cdot76)$$

である。ただし、 V は管の側面の流速（流れの流速）、 ρ は流体の密度、 p_0 は静圧である。し

たがって、管の前面中央と側面における圧力の差を測ることによって流速が次式から計算される。

$$V = \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho}} \quad (3 \cdot 77)$$

このような装置をピトー管という。圧力計の精度さえよければ、気体や液体の流速を正確に求めることができるので、航空機の速度の測定に使われている。大気圧の空気の密度は約 1.2 kg/m^3 なので、流速 $V = 40 \text{ m/s}$ に対しても動圧は $\rho v^2/2 \approx 10^3 \text{ Pa}$ である。これは大気圧の約 1% であるので、この程度の速度では空気を非圧縮性流体と扱って差し支えない。

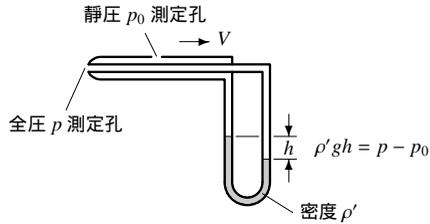


図 3・22 ピトー管（圧力差の測定法は一例）

12 群 - 4 編 - 3 章

3-10 粘性抵抗

(執筆: 伊東敏雄) [2015 年 6 月受領]

流体が運動している場合には圧力の他に接線応力も生じる。この性質を粘性という。粘性は、流体中を運動する物体が受ける抵抗の原因である。

3-10-1 粘性率 (粘性係数)

流れが一様でない場合には、流れを一様にしようとする向きに接線応力が作用する。図 3-23 のように、流れの方向を x 方向として、流れの速度 V_x が y 方向に変化しているとしよう。 y 軸に垂直な面で液体を 2 つに分けると、速度勾配 dV_x/dy をなくそうとする向きに、図の場合には上側は境界面を通して左向きの力を、下側は右向きの力を受ける。境界面に作用する接線応力の大きさ f は通常、速度勾配に比例する。

$$f = \eta \frac{\partial V_x}{\partial y} \quad (3-78)$$

比例係数 η を粘性率または粘性係数という。このように接線応力が速度勾配に比例する流体をニュートン流体、比例関係のない流体を非ニュートン流体という。非ニュートン流体にはペンキ、アスファルト、高分子溶液などが実用上興味深いものが多い。これらの流動性を扱う分野をレオロジーという。

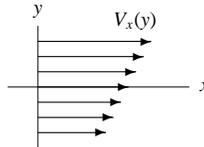


図 3-23 速度勾配のある流れ

3-10-2 円管内の定常流

流体が一様な円管内を定常的に流れる場合を考えよう*。粘性がある場合には、管壁に接する流体の流速は 0 となり、中心軸に近づくにつれて早くなる。半径 a の円管内を流れる粘性率 η の流体の速度分布を求めよう。

円管内に仮想的に半径 r 、長さ l の同軸円筒を考えると、この円筒の内側の流体には境界面を通して流れと逆向きに、次式の大きさの力が作用する。

$$\eta \left(-\frac{dV}{dr} \right) \times (2\pi r l) \quad (3-79)$$

負号は $dV/dr < 0$ であることを考慮したものである。この力に抗して定常流を維持するため

* 流速がある限界を越えると流れは乱流となり、定常流ではなくなる。

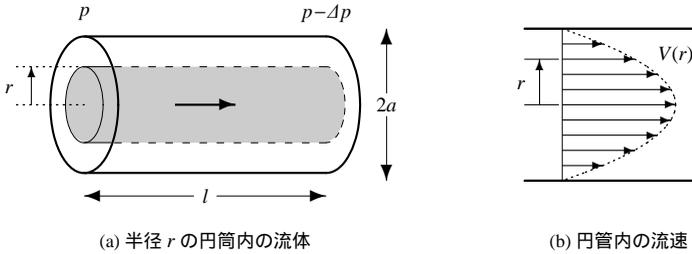


図 3・24 円管内の定常流

には，上流側における圧力が下流側より高くなければならない．両端の圧力差を Δp とすると圧力差による力 $\pi r^2 \Delta p$ と粘性による力 (3・79) は釣り合いの関係にある．

$$\pi r^2 \Delta p = -2\pi r l \eta \frac{dV}{dr} \quad (3 \cdot 80)$$

したがって

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r \quad (3 \cdot 81)$$

両辺を r で積分し，管壁 $r = a$ において $V = 0$ となるように積分定数を決めて次の結果を得る．

$$V(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (a^2 - r^2) \quad (3 \cdot 82)$$

すなわち，管内の流速は放物線状に変化しており，軸上での最大速度は $\Delta p a^2 / 4\eta l$ に等しい．単位時間当たり管の断面を通して流れる流体の体積 Q は

$$Q = \int_0^a V(r) 2\pi r dr = \frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{l} \quad (3 \cdot 83)$$

と表される．この式をハーゲン・ポアズイユの法則という．流量が管の半径（あるいは直径）の 4 乗に比例することに注目されたい．

3-10-3 流体中の運動物体が受ける抵抗力

空気中や水中を運動する物体は抵抗を受ける．しかし，粘性のない完全流体中を運動する物体あるいは完全流体の流れの中に置かれた物体は全く抵抗を受けないことが導かれる．それゆえ，抵抗の原因は粘性にある．物体が受ける抵抗力を理論的に求めるのは難解であるが，次元的な解析によってある程度の考察ができる．一般に，物理学の数式の各項の次元は同一であるという要請に基づいて，関与する物理量の間になり立つ関係を推測する手法を次元解析という．次元解析に際しては，物理現象に関与している物理量を的確に見定めなければならない．

流体中を運動する物体が受ける抵抗力に関する物理量としては、流体の粘性率 η 、密度 ρ 、及び物体の大きさ D と速さ V が挙げられる。そこで、抵抗力 F を次の形に表そう。 K は無次元の定数である。

$$F = KV^n \rho^a \eta^b D^c \quad (3\cdot84)$$

両辺の次元が等しくなるように n, a, b, c を決定しよう。左辺の力 F の次元は MLT^{-2} である。右辺の物理量の次元は $V: LT^{-1}$, $\rho: ML^{-3}$, $\eta: ML^{-1}T^{-1}$, $D: L$ である。式 (3\cdot84) の両辺の次元が同じであるためには、次の 3 つの等式が成り立たねばならない。

$$M \text{ に関して} \quad a + b = 1 \quad (3\cdot85)$$

$$L \text{ に関して} \quad n - 3a - b + c = 1 \quad (3\cdot86)$$

$$T \text{ に関して} \quad -n - b = -2 \quad (3\cdot87)$$

未知の量は 4 個 (n, a, b, c) あるのに対して、方程式は 3 つしかないので全部を確定することはできない。そこで、 n を既知として他の a, b, c を求めると次の結果を得る。

$$a = n - 1, \quad b = -n + 2, \quad c = n \quad (3\cdot88)$$

抵抗力は物体が動いてない ($V = 0$) ときは 0 で、速度が増すにつれ大きくなるはずだから $n > 0$ でなければならないことを考慮して、抵抗力 F は次の形に表される。

$$F = \frac{\eta^2}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} K_n \left(\frac{V\rho D}{\eta} \right)^n \quad (3\cdot89)$$

ただし、 K_1, K_2, \dots は定数である。この式の右辺に現れる無次元の量

$$R = \frac{V\rho D}{\eta} \quad (3\cdot90)$$

はレイノルズ数と呼ばれ、流れの状態を表す重要なパラメータである。一般に、 R が小さいときは流れは層流であり、 R が大きくなると乱流となる。粘性率は密度との比の形で入っており、 η/ρ を動粘性率と呼ぶことがある。レイノルズ数 R を使うと抵抗力は適当な関数 $f(R)$ を用いて次の形に表される。

$$F = \frac{\eta^2}{\rho} f(R) \quad (3\cdot91)$$

次元解析では定数 K_1, K_2, \dots 、したがって関数 $f(R)$ の形を求めることはできない。

経験的事実によれば、物体の速度が十分に遅いときには抵抗力は速度に比例する。もう少し正確に言えば、物体に形にもよるがレイノルズ数が 10 程度よりも小さく物体の周りの流れが定常流（層流）である場合には、展開式 (3\cdot89) の $n = 1$ の項だけとればよい。

$$F = K_1 \eta DV \quad (3\cdot92)$$

比例定数 K_1 は物体の形に依存する．直径 D の球の場合には

$$F = 3\pi\eta DV \quad (3\cdot93)$$

であることが理論的に導かれている．この式をストークスの法則と呼んでいる．速度に比例する抵抗力は，粘性により物体の表面が受ける接線応力に起因するので，粘性抵抗または摩擦抵抗と言われる．

物体が日常経験するような速度で空気中を運動する場合には，レイノルズ数の大きさはだいたい $10^3 \leq R \leq 10^5$ の範囲にあり，抵抗力は速度の 2 乗に比例する．すなわち，展開式 (3・89) の $n = 2$ の項のみを採用すればよい．このときには D^2 の代わりに流れに垂直な物体の断面積 S を使い，定数 K_2 を $C/2$ に置き換えて，次の形に表す．

$$F = \frac{1}{2} C \rho V^2 S \quad (3\cdot94)$$

比例係数 C を抵抗係数という．速度の 2 乗に比例する抵抗力は，流体が物体に当たって運動量を失うことの反作用として物体が抵抗力を受けると考えられるので，慣性抵抗と呼ばれる．物体の下流側の流れは乱流となり，物体背後の圧力は流れに面する側よりも低い．この圧力差のために抵抗力が生じると解釈することができる．

3-10-4 力学的相似

流れのレイノルズ数が等しければ，流体の密度や粘性率，物体の大きさや速度が異なっても，物体の周りの流れの様子は相似している．一般にある現象に関与する物理量の組合せから得られる無次元の量が等しくなることを力学的相似と呼ぶ．

例えば，流体中を運動する物体が受ける抵抗力を理論的に解析することは，単純な形の物体の場合でさえ非常に複雑であるので，高速で運動する車両や飛行機の設計に際しては模型を作って車体や機体の各部にどのような力が働くかを実験的に調べることが不可欠である．この模型実験において，実物と模型が単に幾何学的に相似であるというだけでは正しい模型実験にならない．形は相似であっても作用する力は相似にならないからである．力学的にも相似であるためにはレイノルズ数が等しいことが必要である．

実物の大きさを D ，速度を V ，流体の密度を ρ ，粘性係数を η とし，模型におけるそれらを D' ， V' ， ρ' ， η' とすると，レイノルズ数が等しいという条件は次の式である．

$$\frac{\rho DV}{\eta} = \frac{\rho' D' V'}{\eta'} \quad (3\cdot95)$$

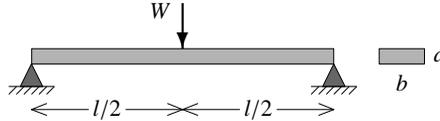
高速の乗り物の開発のために実物の 1/10 の模型を作って，風洞（人工的な空気流を起こす装置）で実験する場合を考えよう．気体の粘性は圧力や温度であまり変化しないから $\eta'/\eta = 1$ とする． $D'/D = 1/10$ であるから $\rho' V'/\rho V = 10$ でなければならない．高速な乗り物の速度より速い風速を作ることは通常大変なので，実際と同じ速度を仮定する ($V'/V = 1$) と，空気の密度は $\rho'/\rho = 10$ ，すなわち大気圧の 10 倍の圧力をかけた高圧風洞内で実験しなければならない．

12 群 - 4 編 - 3 章

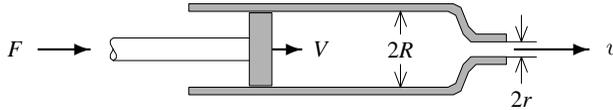
3-11 演習問題

(執筆者: 伊東敏雄) [2015 年 6 月 受領]

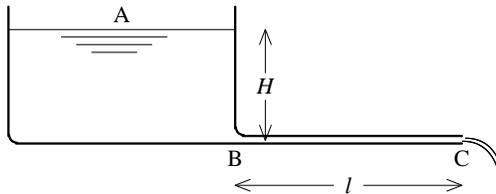
- 密度 ρ , ヤング率 E , 長さ l の一様な太さの棒を水平に支え, その一端を通る鉛直軸の周りに, 水平面で一定の角速度 ω で回転させるとき, この棒はどれだけ伸びるか.
- ポアソン比 σ の弾性体の正方柱の軸に直角な方向に伸び縮みの起こらないようにして, 軸方向の長さを変化させる.
 - 軸方向に圧力 p をかけるとき, 軸と垂直な方向に伸び縮みが起きないためには, 側面にどれほどの圧力をかけなければならないか.
 - 軸に垂直方向に伸び縮みが起きないようにして軸方向の長さを変化させるための力は, 側面を自由にして同じ長さだけ変化させるための力の何倍か.
- 長さ l の両端支持はりが中央に荷重 W を受けるとき, 自重 W_0 も考慮して中央のたわみ h を求めよ.



- 図のような水鉄砲のピストンを力 F で押し出すときの水の噴出速度 v を求めよ.



- 断面積が一樣な水槽 (断面積 A) に水を深さ h だけ入れ, 底にあけた小孔 (断面積 a) から流出させるとき, 水が全部出るまでの時間を求めよ. ただし, 出口で流線は平行であるとする.
- 図の容器の液体が単位時間当たりに流出する体積 Q を求めよ. ただし, A から B まではベルヌーイの定理, B から出口 C まではポアズイユの定理が成り立つとし, 液体の粘性率 η , 密度 ρ , 水平管の長さ l , 内半径 r , 液面までの高さ H とする.



- 船が航行するときにかかる抵抗の一つに, 波を作ることによる造波抵抗がある. この抵抗力 F は, 流体の密度 ρ , 船体の排水体積 V_0 , 速度 v , 重力加速度 g に関する. 次元解析により次式を示せ. ただし, $f(x)$ は 1 価関数である.

$$F = \rho v^2 V_0^{2/3} f\left(\frac{V_0^{1/3} g}{v^2}\right)$$

解答

1. 回転軸から $x \sim x + dx$ 部分の伸びは $(\rho\omega^2/E)(l-x)x dx$, 積分して $\rho\omega^2 l^3/6E$.
2. (1) 長さ方向 (x 方向) の圧力を p , 直角方向 (y, z 方向) の圧力を p' とすると , y, z 方向のひずみがないためには $-\frac{p'}{E} + \sigma\frac{p'}{E} + \sigma\frac{p}{E} = 0$, $p' = \frac{\sigma}{1-\sigma}p$.

(2) x 方向のひずみ $-\frac{p}{E} + 2\sigma\frac{p'}{E} = \frac{p}{E}\left(-1 + \frac{2\sigma^2}{1-\sigma}\right) = -\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{1-\sigma} \frac{p}{E}$,

したがって , $\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$ 倍 .

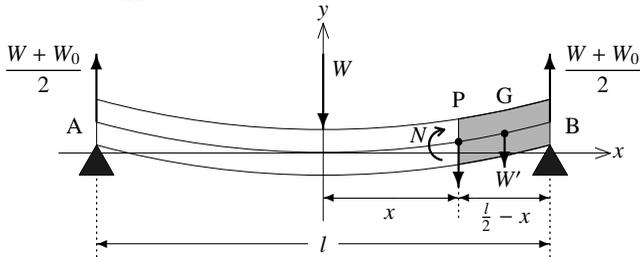
3. 図のように中立面の最下点を座標原点にとると , 陰影部分に作用する力のモーメントの釣り合いより

$$\frac{EI}{R(x)} = \left(\frac{l}{2} - x\right) \frac{W + W_0}{2} - \frac{l/2 - x}{2} W' , W' = \frac{(l/2 - x) W_0}{l}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cong \frac{1}{R(x)} = \frac{1}{4EI}(l-2x)W + \frac{1}{8IEI}(l^2 - 4x^2)W_0$$

$x = 0$ で $y = 0$, $dy/dx = 0$ より $y(x)$ が決まる . 棒のたわみは $h = y(l/2)$ である .

$$h = \frac{l^3}{48EI}\left(W + \frac{5}{8}W_0\right) , \text{長方形断面の場合には } I = \frac{1}{12}a^3b$$



4. 連続の式 $\pi R^2 V = \pi r^2 v$ とベルヌーイの式 $\frac{\rho v^2}{2} = \frac{\rho V^2}{2} + \frac{F}{\pi R^2}$ より $v = \sqrt{\frac{1}{1-(r/R)^4} \frac{2F}{\pi R \rho}}$

5. 水位が x から $|dx|$ 下がるのに要する時間を dt とすると , $v \, dt = -A \, dx$ ($v = \sqrt{2gx}$) .

$$t = - \int_h^0 \frac{A}{a} \frac{dx}{\sqrt{2gx}} = \frac{A}{a} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

6. AB 間についてベルヌーイの定理を適用して $p_0 + \rho g H = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$

BC 間についてポアズイユの式より $Q = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \Delta p = \frac{\pi r^4}{8\eta l} (p_B - p_C) = \frac{\pi r^4}{8\eta l} (p_B - p_0)$

$Q = \pi r^2 v_B$ であるから

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\eta l} (p_B - p_0) = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \left(\rho g H - \frac{\rho v_B^2}{2}\right) = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \left(\rho g H - \frac{\rho Q^2}{2\pi^2 r^4}\right) = \frac{\pi r^4 \rho g H}{8\eta l} - \frac{\rho Q^2}{16\pi \eta l}$$

以上から $Q = -\frac{8\pi \eta l}{\rho} + \sqrt{\left(\frac{8\pi \eta l}{\rho}\right)^2 + 2(\pi r^2)^2 g H}$.

7. F, g, ρ, v, V_0 から組み立てられる $\frac{F}{\rho v^2 V_0^{2/3}}$, $\frac{g V_0^{1/3}}{v^2}$ が無次元であることに注意 .