■12 群（電子情報通信基礎）－ 4 編（力学・電磁気学）

1 章 質点の力学

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

■概要■

物体が時間の経過とともに空間的な位置を変えることを運動という．力学の法則は物体の運動を極めて正確に記述する．本章では，物体のなかで最も簡単な質点，大きさのない点状の物体の運動を扱う．大きさのある物体の重心の運動は，質点の運動として記述できる．

【本章の構成】

本章では，まず運動の記述に必要な質点の位置の記述（1-1 節）と質点の速度と加速度の定義（1-2 節）を与え，運動を支配する法則（1-3 節）を解説する．物理の式を取り扱う際に重要であるので，物理量の次元の概念（1-4 節）を説明した後，基本的な運動の例として，放物運動（1-5 節），単振動（1-6 節）及び単振り子の運動（1-7 節）を，運動方程式に基づいて調べる．

次に，重要な物理量である仕事とエネルギー（1-8 節）について解説する．更に日常の運動を解析する際に欠かせない摩擦現象（1-9 節）を扱い，保存力と位置エネルギーの定義（1-10 節）を述べ，力学的エネルギー保存則（1-11 節）について解説する．

また，ある場合には運動を平面極座標で記述すること（1-12 節）が便利であることを示し，万有引力による惑星の運動（1-13 節）を解析する．

最後に，運動の法則が前提としている慣性座標系以外の座標系において運動を記述するときに現れる慣性力（1-14 節）について解説する．

■12 群 - 4 編 - 1 章

1-1 位置と座標系

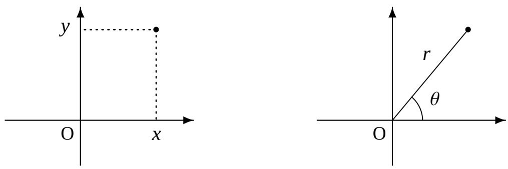
（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

力学の基本概念は運動である．運動とは，物体が移動して位置を変えることである．位置の変化を調べるには位置を記述することが必要である．このために座標系を用いる．

1-1-1 位置と座標系

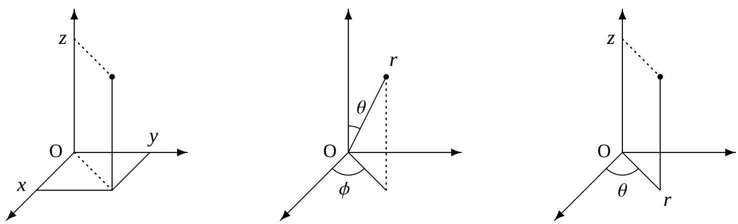
座標系には直交座標，極座標，円筒座標などがあるが，直交座標系が最も基本的である．ある点を原点と定めて，この点を通り互いに直交する x 軸，y 軸，z 軸からなる座標系が 3 次元直交座標系である．空間における質点の位置は座標 (x, y, z) で指定することができる．

空間の位置を一般的に記述するためには 3 次元座標系を用いるが，運動が一平面内に限られる場合には 2 次元座標系を用いる．**図 1･1** に 2 次元の直交座標と極座標の座標点の表し方を示す．**図 1･2** には 3 次元の直交座標，極座標，円筒座標の座標点の表し方を示す．



(a) **直交座標**　　(b) **極座標**

図 1･1　2 次元座標系



(a) 3 **次元直交座標**　　(b) 3 **次元極座標**　　(c) **円筒座標**

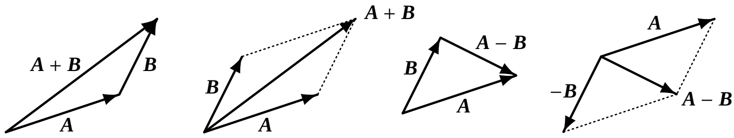
図 1･2　3 次元座標系

1-1-2 ベクトルとスカラー

大きさと方向を持つ量をベクトルという．これに対して大きさだけを持つ量をスカラーという．

ベクトルは矢印で表示することができる．矢印の向きがベクトルの方向であり，矢印の長さがベクトルの大きさである．ベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさを A または $|\boldsymbol{A}|$ と書く．ベクトル $\boldsymbol{A}$ とスカラー k の積 $k\boldsymbol{A}$ は，$k > 0$ ならば $\boldsymbol{A}$ と同じ向き，$k < 0$ ならば $\boldsymbol{A}$ と逆向きで，大きさが A の大きさの k 倍のベクトルである．2 つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の和と差のベクトルを**図 1･3**

に示す．ベクトルを数量的に扱うには座標系が必要である．



(a) **ベクトルの和**　　(b) **ベクトルの差**

図 1·3　ベクトルの和と差

1-1-3 位置ベクトルと変位ベクトル

原点から注目する座標点に向かうベクトルを位置ベクトルという．質点がある位置から別の位置に移動したとき，はじめの位置から移動後の位置に向かうベクトルを変位ベクトルという．はじめの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$，移動後の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}'$，変位ベクトルを $\varDelta\boldsymbol{s}$ とすると

$$\varDelta\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} \tag{1·1}$$

である（**図 1·4** 参照）．

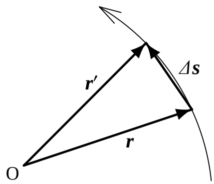


図 1·4　変位ベクトル

■12 群 - 4 編 - 1 章

1-2 速度と加速度

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

本節では，質点の運動の記述に必要な速度と加速度を定義する．

1-2-1 速　度

単位時間当たりの変位，すなわち変位の時間微分を速度という．質点の位置ベクトルの時間変化を $\boldsymbol{r}(t)$ とすると，微少時間 $\mathit{\Delta} t$ の間の変位ベクトルは

$$\mathit{\Delta}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}(t + \mathit{\Delta}t) - \boldsymbol{r}(t) \tag{1・2}$$

であるから，速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ は

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\mathit{\Delta}t\to 0} \frac{\mathit{\Delta}\boldsymbol{s}}{\mathit{\Delta}t} = \lim_{\mathit{\Delta}t\to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t + \mathit{\Delta}t) - \boldsymbol{r}(t)}{\mathit{\Delta}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1・3}$$

と表され，速度ベクトルは位置ベクトルの時間微分に等しい．

変位ベクトル $\mathit{\Delta}\boldsymbol{s}$ の方向は，ベクトルの大きさが無限に小さくなるとき質点が描く曲線 (軌跡) の接線方向に一致する．すなわち，速度ベクトルは軌跡の接線方向を向いている．

速度ベクトルの大きさを速さという．速さは，軌跡に沿って単位時間当たりに移動する距離である．

3 次元直交座標系では速度ベクトルを x 成分 v_x，y 成分 v_y，z 成分 v_z に分解する．位置座標の時間変化を $(x(t), y(t), z(t))$ とすると

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{1・4}$$

である．速さは

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \tag{1・5}$$

と表される．

速度ベクトルが一定の運動を等速度運動という．ベクトルが一定であるとは大きさも方向も一定であるから，等速度運動とは速さが一定の直線運動を意味する．これに対し等速運動は，速さは一定であるが，軌跡は直線であるとは限らない．

なお “速度” とは本来は “速度ベクトル” のことであるが，“速さ” の意味にも用いられる．

1-2-2 角速度

質点の軌跡が円である場合（円運動）を考えよう．円の半径を r とする．質点が描いた軌跡 (弧) の長さ s は，弧の角度 θ とすると $s = r\theta$ であるから，速さは

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r\omega \tag{1・6}$$

と表される．ここで，角度の時間微分

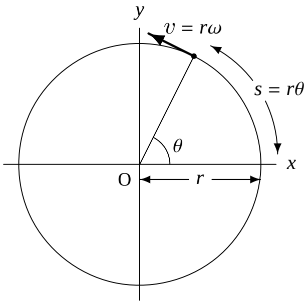


図 1･5　円運動

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1･7}$$

を角速度という．角速度が一定の円運動を等速円運動という．

1-2-3 加速度

速度の時間微分を加速度という．速度を $\boldsymbol{v}$，位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると 加速度 $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1･8}$$

である．

微小時間 Δt の間の速度ベクトルの変化 $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}$ を，速度の方向の成分（接線成分）とそれに垂直な方向の成分（法線成分）に分けよう．接線成分は $\Delta v = v' - v$，法線成分は $v\Delta\theta$ である（**図 1･6** 参照）．ただし，$\Delta\theta$ はその間の速度の方向変化である． なお，Δv は速度ベクトルの大きさ（速さ）の差であって，ベクトル $\Delta\boldsymbol{v}$ の大きさではないことに注意されたい．接線成分の時間変化率

$$a_{\mathrm{t}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1･9}$$

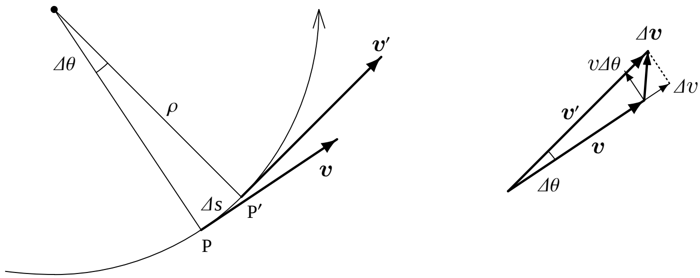


図 1･6　速度変化の接線成分と法線成分

を加速度の接線成分という．次に，軌跡の曲率半径を ρ とすると，変位 Δs は $\Delta s = \rho\Delta\theta$ であるので，速度変化の法線成分は $v\Delta\theta = v\Delta s/\rho$ と表される．法線成分の時間変化率

$$a_{\mathrm{n}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{v}{\rho} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{\rho} \tag{1・10}$$

を加速度の法線成分という．加速度の法線成分は常に曲率中心の方向を向いている．

直線運動では，方向の変化はないから $a_{\mathrm{n}} = 0$ である．また，等速運動においては，速さの変化はないから $a_{\mathrm{t}} = 0$ である．特に，等速円運動の場合には軌跡の曲率半径は円の半径 r に等しいので，加速度の法線成分は

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \tag{1・11}$$

である．等速円運動の加速度は法線成分のみであり，円の中心方向を向いているので，向心加速度と呼ばれる．

■12 群 - 4 編 - 1 章

1-3 運動の法則

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

ニュートンによってまとめられた運動の 3 つの法則は，論理的に証明されるものではなく，実験によってその正しさが確認されているものである．

1-3-1 運動の法則

（1）運動の第 1 法則

「他の物体から何の影響も受けない物体は加速度のない運動をする.」

すなわち，静止している物体は静止状態を続け，運動している物体は一定の速さで直線運動を続ける．このことはガリレイによって見出された法則で，慣性の法則とも呼ばれる．

運動は，それを観測する座標系が違えば，異なる．運動の第 1 法則は，ほかから何の影響も受けない物体が加速度のない運動をすると観測される座標系が存在することを述べている．このような座標系を慣性座標系，あるいは簡単に慣性系という．以後，力学は慣性系において記述する．座標系は自然現象を最も簡単に記述できるように選ぶのが自然であり，慣性系はそのような座標系なのである．

（2）運動の第 2 法則

「物体の加速度と質量の積は物体に作用する力に等しい.」

物体が加速度のある運動をしているならば，物体はほかから何らかの影響を受けていることになる．経験によれば 2 つの物体が互いに作用し合い加速度のある運動をするとき，加速度の大きさの比は常に一定である．加速度の大きさを決める物体に固有な物理量を質量といい，次のように定義される．

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} \tag{1・12}$$

ここで，a_1/a_2 は 2 つの物体の加速度の大きさの比，m_1/m_2 は質量の比である．質量の単位を定義すれば，原理的には単位質量の物体との加速度の比を取ることにより質量は決定される．

質量と加速度の積は，物体が受ける相互作用の大きさを表し，物体に作用する力という．すなわち，質量 m の物体に力 $\boldsymbol{F}$ が作用するとき，物体の速度を $\boldsymbol{v}(t)$ とすると

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \tag{1・13}$$

の関係がある．この式を運動方程式という．第 2 法則は運動の法則とも呼ばれる．

力が具体的に与えられれば，運動方程式から速度と時間の関係，位置座標と時間の関係（したがって運動の軌跡）を求めることができる．ただしこの場合，初めのある時刻における位置と速度が与えられなければならない．これを初期条件という．

（3）運動の第 3 法則

「2 つの物体が互いに作用し合うとき，第 1 の物体が第 2 の物体に及ぼす力は，第 2 の物体が第 1 の物体の及ぼす力と大きさは同じで方向は逆向きである.」

作用は常に反作用を伴い，反作用なしに物体に力が作用するということはありえない．この法則は作用・反作用の法則とも呼ばれる．

1-3-2 運動量

質点の質量 m と速度（ベクトル）$\boldsymbol{v}$ の積を運動量（ベクトル）という．運動量を $\boldsymbol{p}$ と表すと

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{1・14}$$

である．運動量を使うと運動方程式はより簡潔な次の式で表される．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \tag{1・15}$$

また，この両辺を時刻 t_1 から t_2 まで定積分すると次式を得る．

$$\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t \tag{1・16}$$

ただし，$\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$ は時刻 t_1，t_2 における運動量である．この式の右辺の量を力積という．すなわち，運動量の変化は力積に等しい．

1-3-3 角運動量

質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ のベクトル積を角運動量（ベクトル）という．角運動量を $\boldsymbol{l}$ と表すと

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \tag{1・17}$$

である．角運動量の時間微分は

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{1・18}$$

右辺の第 1 項の速度と運動量のベクトル積は，平行なベクトル同志のベクトル積であるから 0 である．第 2 項では運動方程式 (1・15) を使った．以上から，角運動量を使うと運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{1・19}$$

と表される．右辺の量 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ を力のモーメントという．

質点に作用する力が常に原点を向いているような場合には，$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{F}$ のベクトル積は 0 であるから，質点の角運動量ベクトルは時間的に変わらない．角運動量ベクトルの方向が時間的に一定であることは運動が一平面内に限られることを，大きさが一定であることは面積速度（1–12–3 項参照）が一定であることを意味する．

■12 群 - 4 編 - 1 章

1-4 物理量の単位と次元

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

物理学で定義され，客観的に測定できる量を物理量という．物理量の単位と次元について解説する．

1-4-1 物理量の単位

すべての物理量は決まった単位で測定される．原理的にはどの物理量の単位も任意に決めることができるが，物理量の間に成り立つ関係を利用すると，幾つかの基本的な物理量の単位（基本単位）を決めれば，ほかの物理量の単位は基本単位から組み立てることができる．このような単位は誘導単位と呼ばれる．国際単位系（SI*）では，力学の基本的な物理量として時間，長さ，質量を採用する．これらの基本単位，及び補助単位の平面角度の単位は次のように決められている．

時間の単位 1 秒 (s) の時間は ^{133}Cs の放出する波長約 3.26 cm の電磁波の 1 周期の 9 192 631 770 倍の時間.

長さの単位 1 メートル (m) の長さは光が真空中を 1/299 792 458 s の間に進む距離.

質量の単位 1 キログラム (kg) の質量は国際キログラム原器の質量.

角度の単位 1 ラジアン (rad) の角度は円の中心から, 半径に等しい長さの弧を見る平面角度†.

力学に出てくるこれら以外の物理量の単位は以上の基本単位から組み立てることができる．例えば，速度の単位は m/s，加速度の単位は m/s^2 である．力の単位 kg·m/s^2 には固有の記号と名称（N，ニュートン）が与えられている．

1-4-2 物理量の次元

例えば，長さの単位には m のほかに cm，km，インチ，フィート，マイルなどがあるが，単位の選び方に関係なく長さが持つ共通の性格を長さの次元という．一般の物理量の次元は，基本的な物理量の次元を使って表すことができる．長さ（Length）の次元を L，質量（Mass）の次元を M，時間（Time）の次元を T という記号で表し，一般の物理量の次元は $L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}$ と表す．速度の次元は LT^{-1}，加速度の次元は LT^{-2}，力の次元は LMT^{-2} である．なお，角度は無次元である．

物理量の間の関係を表した式においては，両辺の各項の次元はすべて同一である．式を導いたときに各項の次元を比較することは，式が間違えていないかを点検する簡便な方法である．

物理的な考察によって，ある物理量に別の複数の物理量が関与していることが分かる場合に，次元の考察だけでその間の関係の特性を求めることができる．この手法を次元解析という（**??**項参照）．

* SI は Système International d’Unités の略

† 1°(度) = π/180 rad, 1′(分) = 1°/60, 1″(秒) = 1′/60 である.

■12 群 - 4 編 - 1 章

1-5 放物運動

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

大きさも方向も一定な力を受けて運動する質点の軌跡は一般に放物線となる．

1-5-1 重力加速度

地表付近における物体には鉛直下方にほぼ一定の力が作用する．この力を重力という．重力は物体の質量に比例し，比例定数を重力加速度といい，記号 g で表す．場所により多少の違いはあるが $g \cong 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ である．

1-5-2 一定の力による運動

一定の力 $\boldsymbol{F}$ を受ける質点の運動を考えよう．質点の質量を m とすると運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \tag{1・20}$$

$\boldsymbol{F}$ は一定であるから

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}t + \boldsymbol{v}_0 \tag{1・21}$$

となる．ただし，積分定数 $\boldsymbol{v}_0$ は質点の初速度を表す．この式から速度は時間の 1 次式で表されること，質点の運動は力のベクトル $\boldsymbol{F}$ と初速度ベクトル $\boldsymbol{v}_0$ の作る平面内に限られることが分かる．この平面を x-y 面として，力 $\boldsymbol{F}$ に平行に y 軸を，それに直角に x 軸をとると，速度の x 成分と y 成分は

$$v_y = \frac{F}{m}t + v_{0y}, \quad v_x = v_{0x} \tag{1・22}$$

と表される．v_{0x}，v_{0y} は，それぞれ初速度の x，y 成分である．

1-5-3 一様な重力による放物運動

原点から初速度 v_0 で水平から角度 θ の方向に投げられた質点の運動を調べよう．空気の抵抗，地球の自転の影響は無視する．質点には重力 mg が鉛直下方に作用する．鉛直上方を y 軸の正方向とする．式 (1・22) において，$F = -mg$，$v_{0y} = v_0 \sin\theta$，$v_{0x} = v_0 \cos\theta$ を代入し，速度の x，y 成分を座標の時間微分で表して次式を得る．

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -gt + v_0 \sin\theta, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 \cos\theta \tag{1・23}$$

これから

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)\,t + y_0 \tag{1・24}$$

$$x = (v_0 \cos\theta)\,t + x_0 \tag{1・25}$$

を得る．積分定数 x_0，y_0 は座標の初期値である．$t = 0$ に原点を出発したと考えているから

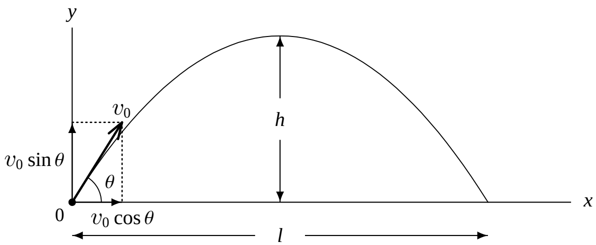


図 1･7　投射物体の運動

$x_0 = 0$，$y_0 = 0$ である．

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)\, t \tag{1･26}$$

$$x = (v_0 \cos\theta)\, t \tag{1･27}$$

時間 t を消去すると，質点が描く軌跡の式が得られる．

$$y = x \tan\theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2 \tag{1･28}$$

軌跡の曲線は**図 1･7** に示すような放物線である．最高点の高さ h と水平到達距離 l はそれぞれ次の式で与えられる．

$$h = \frac{{v_0}^2 \sin^2\theta}{2g} \tag{1･29}$$

$$l = \frac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{g} \tag{1･30}$$

初速度 v_0 が与えられた場合，水平到達距離は $\theta = 45°$ のときに最大 ${v_0}^2/g$ となる．また，最高点の高さは真上（$\theta = 90°$）に投げ上げたときに最大 ${v_0}^2/2g$ となる．

■12 群 - 4 編 - 1 章

1-6 単振動

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

単振動は物理学のいろいろな場面に登場する基本的な運動形態である．

1-6-1 単振動の微分方程式

一般に安定な平衡点にある質点を平衡点からずらしたとき，平衡点からの変位が小さいときには，質点には平衡点からの変位に比例し，質点を平衡点に戻す向きの力が作用する．このような力を復元力といい，復元力と変位の比例関係をフックの法則と呼ぶ．このとき，質点は平衡点を中心として振動する．

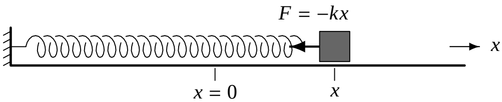


図 1･8　ばねにつながれた質点

具体的な例として，一端を固定されたばねの他端につながれた質量 m の質点が水平な直線上で振動する場合を考えよう（**図 1･8** 参照）．ばねの質量及び質点に作用する抵抗力（摩擦力など）は無視できるとする．運動が行われる直線を x 軸に選び，平衡点を原点 $(x = 0)$ とする．質点が x にあるとき質点に作用する力 F は

$$F = -kx \tag{1･31}$$

と表される．比例定数 k はばね定数，一般には弾性定数と呼ばれる．右辺の負号は，力が質点を平衡点に戻そうとする向きに作用することを意味する．質点の運動方程式は次式である．

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \tag{1･32}$$

ここで，新たな定数

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1･33}$$

を導入すると，運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x \tag{1･34}$$

となる．この微分方程式で記述される運動を単振動あるいは調和振動という．

1-6-2 単振動の周期

微分方程式 (1･34) を満たす関数に $\sin \omega t$ と $\cos \omega t$ がある．2 階の微分方程式の独立な解（特殊解）が 2 個あるとき，その 1 次結合は一般解であるから，次式を得る．

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{1・35}$$

ただし，A と B は任意の定数であり，初期条件（初期位置と初速度）を満たすように決められる．例えば，$t = 0$ において $x = x_0$，$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v_0$ とすると $A = v_0/\omega$，$B = x_0$ である．微分方程式 (1･34) の一般解は

$$x(t) = C\sin(\omega t + \phi) \ \text{あるいは}\ x(t) = C\cos(\omega t + \phi') \tag{1・36}$$

と表すこともできる．ただし，C と ϕ（または ϕ'）は任意の定数であり，A, B とは次の関係にある．

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{1・37}$$

$$\sin\phi = \frac{B}{C}, \quad \cos\phi = \frac{A}{C} \quad \left(\text{または}\ \sin\phi' = -\frac{A}{C}, \quad \cos\phi' = \frac{B}{C}\right) \tag{1・38}$$

式 (1･35) または (1･36) で表される運動が単振動または調和振動である．単振動する質点を調和振動子という．定数 ω を角振動数，$\nu = \omega/2\pi$ を振動数，$T = 1/\nu = 2\pi/\omega$ を振動の周期という．また，C を振幅，ϕ（または ϕ'）を初期位相という．振動の周期は，質点の質量 m，ばね定数（弾性定数） k と

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{1・39}$$

の関係にある．質量が大きいほど，また弾性定数が小さいほど，周期は長くなる．

なお，式 (1･36) は半径 C の円周 $x^2 + y^2 = C^2$ 上を一定の角速度 ω で円運動する質点の，x 軸への正射影になっている．

1-6-3 鉛直なばねに吊した質点の運動

一端を固定した鉛直なばねに吊した質点を考えよう（**図 1･9** 参照）．質点が振動しないで静止しているときのばねの伸びを h とすると，ばねの復元力 (の大きさ) kh が重力 (の大きさ) mg と釣り合いの関係にあることから

$$h = \frac{mg}{k} \tag{1・40}$$

を得る．この釣り合いの位置を x 軸の座標原点とし，鉛直下方を x 軸の正の方向とする．質点が位置 x にあるとき，ばねの伸びは $x + h$ であるから，ばねの復元力は $-k(x + h)$ である．これと質点に作用する重力 mg を考えて，運動方程式は次の式で表される．

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = mg - k(x + h) = -kx \tag{1・41}$$

したがって，運動方程式は式 (1･32) に帰着する．質点は釣り合い点を中心に単振動することが分かる．角振動数及び振動の周期は質量 m とばね定数 k だけで決まり，重力加速度 g には関係しない．

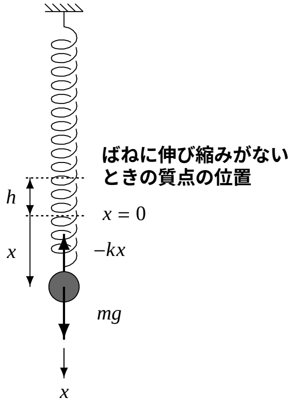


図 1·9　鉛直なばねに吊した質点

■12 群 - 4 編 - 1 章

1-7 単振り子

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

重力場の中で糸に吊るしたおもり（単振り子）の微小振動は単振動とみなせる．

1-7-1 単振り子の運動方程式

地上の一様な重力場の中で，糸につるした質点を単振り子という．本節では単振り子の運動，特に微小振動を調べる．

糸の長さを l，糸が鉛直下方となす角度を $\theta(t)$ とすると，質点の速さは $v = l\,\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$，接線方向の加速度は $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$，法線方向の加速度は v^2/l である．質点の質量を m とする．質点に作用する力には，鉛直下方に重力 mg，糸から受ける力 F （糸の張力）がある．重力 mg を接線方向と法線方向に分解すると，それぞれ $-mg\sin\theta$，$-mg\cos\theta$ である．したがって，運動方程式は

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\theta \tag{1·42}$$

$$ml\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = F - mg\cos\theta \tag{1·43}$$

となる．なお，糸の質量や空気の抵抗は無視している．運動は第 1 式 (1·42) から求まる．

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{1·44}$$

運動方程式の第 2 式 (1·43) は糸の張力を与える．

$$F = mg\cos\theta + ml\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{1·45}$$

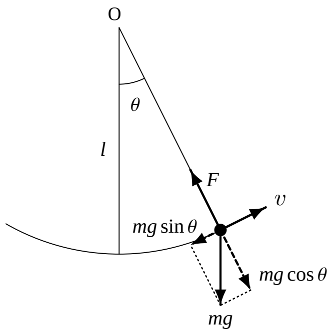


図 1·10　単振り子

1-7-2 微小振動の周期

振り子が釣り合い点の付近で微小振動する場合には，近似 $\sin\theta \cong \theta$ が使えるので式 (1･44) は

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\theta \tag{1･46}$$

となる．ただし

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{1･47}$$

である．式 (1･46) は単振動の微分方程式にほかならない．振動の周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1･48}$$

である．周期は質量や振幅には関係なく，振り子の長さによって決まる．これを単振り子の等時性という．周期 1 s の単振り子の長さは約 25 cm である．ただし，振動の振幅が大きくなると周期は少し長くなり，等時性は成り立たない．

■12 群 - 4 編 - 1 章

1-8 仕事とエネルギー

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

どんな力学の問題も運動方程式から出発して，少なくとも原理的には解くことができるが，仕事とエネルギーの概念を使うとはるかに容易に運動について必要な情報を得ることができる場合が多い．さらに，エネルギーの概念は物理学のあらゆる場面で重要な役割を果たす

1-8-1 仕事と仕事率

質点が力 $\boldsymbol{F}$ を受けて微小距離 d$\boldsymbol{s}$ だけ変位したとき（**図 1･11** 参照），この間に力 $\boldsymbol{F}$ がした仕事 dW を次の式で定義する．

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = F\,\mathrm{d}s\,\cos\theta \tag{1･49}$$

ここで，$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ はベクトル $\boldsymbol{F}$ と d$\boldsymbol{s}$ のスカラー積，θ は 2 つのベクトルのなす角度である．

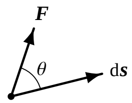


図 1･11　力 $\boldsymbol{F}$ と微小変位 d$\boldsymbol{s}$

質点は力 $\boldsymbol{F}$ により仕事をされたともいう．質点が点 A から点 B まで移動する間に（**図 1･12** 参照），質点に作用する力がなした仕事は次の線積分で表される．

$$W = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1･50}$$

単位時間当たりの仕事を仕事率という．仕事率 P は

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \tag{1･51}$$

と表される．$\boldsymbol{v}$ は質点の速度である．

国際単位系 (SI) では，1 N の力が，力の方向に 1 m の変位を引き起こすときに力がする仕事を 1 J と定義する．また 1 s 間に 1 J の仕事をするときの仕事率を 1 W と定義する．

1-8-2 運動エネルギー

力 $\boldsymbol{F}$ を受けて運動している質点を考えよう．多くの力が作用している場合には $\boldsymbol{F}$ はすべての力の合力である．運動方程式から

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1･52}$$

である．この力により質点が微小変位 d$\boldsymbol{s}$ = $\boldsymbol{v}$ dt するときに，力がなす仕事は

$$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = m\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v} = mv\,\mathrm{d}v \tag{1･53}$$

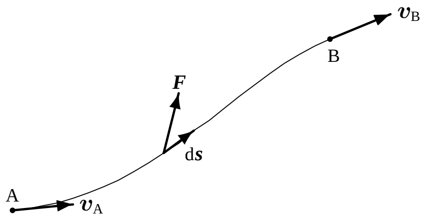


図 1·12　質点が A から B まで移動する間を考える

である．ここで，$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=v^2$ であるから $\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}=v\,\mathrm{d}v$ であることに注意されたい．質点が点 A，B を通過するときの速さを v_A，v_B とすると，質点が点 A から点 B まで行く間に力がなす仕事は次の式で表される．

$$\int_\mathrm{A}^\mathrm{B}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_{v_\mathrm{A}}^{v_\mathrm{B}}mv\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}mv_\mathrm{B}^2-\frac{1}{2}mv_\mathrm{A}^2 \tag{1·54}$$

左辺と右辺を入れ替えて

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{B}^2-\frac{1}{2}mv_\mathrm{A}^2=\int_\mathrm{A}^\mathrm{B}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1·55}$$

を得る．左辺に出てくる量 $mv^2/2$ を質点の運動エネルギーという（運動エネルギーは仕事と同じ次元を持っている）．式 (1·55) は，運動エネルギーの増加が力のなす仕事に等しいことを述べている．運動エネルギー $mv^2/2$ は質点を静止状態から速さ v まで加速するのに必要な仕事であるとも言える．

点 A を通過するとき速さ v で運動していた質点が点 B で静止したとしよう．式 (1·55) は

$$-\frac{1}{2}mv^2=\int_\mathrm{A}^\mathrm{B}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1·56}$$

となる．質点が相手に及ぼす力を $\boldsymbol{F}'$ とすると，作用・反作用の法則によれば $\boldsymbol{F}'=-\boldsymbol{F}$ であるので

$$\frac{1}{2}mv^2=\int_\mathrm{A}^\mathrm{B}\boldsymbol{F}'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1·57}$$

質点が相手に及ぼす力のなす仕事を，質点がなす仕事という．したがって，速さ v で運動している質点は静止するまでに $mv^2/2$ の仕事をなしうる．一般に，仕事をなし得る能力をエネルギーという．運動エネルギーとは運動する物体が持っているエネルギーである．

■12 群 - 4 編 - 1 章

1-9 摩擦現象

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

物体が他の物体面上を滑るとき，現実には常に運動を妨げる向きの力が現れる．この現象を摩擦という．

1-9-1 静止摩擦力

（1）静止摩擦係数

水平面上に置かれた静止物体を考える．物体には重力 mg が作用しており，物体は面に荷重を与える．この反作用として物体は荷重に等しい上向きの力を受ける．物体が面から垂直方向に受ける力を垂直抗力という．いまの場合，垂直抗力の大きさは重力 mg に等しい．

この物体に水平方向の力を加えると，物体は動き始めるはずであるが，現実には力がある大きさを超えるまでは物体は動かない．静止しているということは，加えた力 $\boldsymbol{F}$ と大きさが等しい逆向きの力 $\boldsymbol{F}' = -\boldsymbol{F}$ が物体に作用しており，合力は 0 であることを意味する．物体が面から受ける $\boldsymbol{F}'$ を静止摩擦力という（**図 1･13**(a) 参照）．

静止摩擦力の大きさには限界があり，この限界を超えて力を加えると物体は動き始める．静止摩擦力の最大値 F'_{max} は近似的に垂直抗力 N に比例し

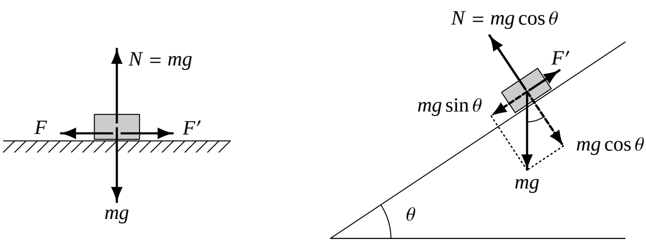
$$F'_{\mathrm{max}} = \mu N \tag{1･58}$$

と表される．比例定数 μ を静止摩擦係数という．静止摩擦係数は接触面の面積には無関係で，接触面の材料と状態によって決まる．

（2）摩擦角

物体が置かれている面を水平から次第に傾けていくとき，物体が初めて滑り出すときの斜面と水平面の傾き角を θ_0 とする．斜面に沿って物体を滑らせようとする力 $mg\sin\theta_0$ が最大静止摩擦力 $\mu N = \mu mg\cos\theta_0$ に等しいことから次の関係式を得る．

$$\mu = \tan\theta_0 \tag{1･59}$$



(a) **水平面上の物体**　　(b) **斜面上の物体**

図 1･13　摩擦現象
図は力の釣り合いの関係を模式的に示したもので，物体の大きさを考えた場合に力の作用点の位置は正確ではない．

この式を満たす角度 $\theta_0 = \tan^{-1}\mu$ を摩擦角という．

1-9-2 動摩擦力

（1）動摩擦係数

水平な面上を物体がすべり始めても，力を加えなければ物体はだんだん遅くなり，ついには静止する．つまり，物体は運動方向と逆向きの力を床から受けている．この力を動摩擦力という．動摩擦力の大きさ F' も近似的に垂直抗力 N に比例し

$$F'_{\mathrm{max}} = \mu' N \tag{1・60}$$

と表される．μ' を動摩擦係数といい，通常，静止摩擦係数より少し小さい（10 ~ 20% 程度）．動摩擦係数は接触面の面積及び（少なくとも通常の速さの範囲において）すべり合う速さには無関係であり，接触面の材料と状態によって決まる．

静止摩擦係数も動摩擦係数も接触面あるいはこすれあう面の状態に敏感で，例えば接触面が濡れている場合や潤滑油を塗った場合には摩擦係数は小さくなる．摩擦係数が 0（$\mu = 0$ 及び $\mu' = 0$）の面，すなわち摩擦力が生じない理想化された面を「なめらかな面」という．

動摩擦力は常に物体の運動方向とは逆向きに作用するから，動摩擦力が運動物体になす仕事は常にマイナスであり，物体の運動エネルギーを減少させる．エネルギーの観点から見ると，減少した運動エネルギーは熱エネルギーに転換される．

（2）斜面をすべり下りる物体

水平と角度 θ をなす斜面をすべり下りる物体を考えよう．空気の抵抗は無視できるものとする．物体に作用する力は重力 mg，垂直抗力 $N = mg\cos\theta$，動摩擦力 $F' = \mu' N$ の 3 つである（図 1・13(b) 参照）．斜面に沿って斜面下向きに x 軸をとると，運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = mg\sin\theta - \mu' mg\cos\theta \tag{1・61}$$

と書ける．μ' を定数とすれば物体は一定の加速度

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = g(\sin\theta - \mu'\cos\theta) \tag{1・62}$$

で斜面をすべり下りる．

■12 群 - 4 編 - 1 章

1-10 保存力と位置エネルギー

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

保存力と位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）は物理学のいろいろな場面で出てくる重要な概念である．

1-10-1 保存力

質点が，空間の各点においてその点によって一義的に決まる力の作用を受けるとき，この空間を力の場あるいは力場という（空間の力を力場ということもある）．

時間によって変化しない定常的な力場の中を質点が移動するとき，質点に作用する場の力のなす仕事が出発点と到達点の位置のみで決まり，途中の経路に依存しないとき，この力場を保存力場といい，場の力を保存力という．すなわち，質点がある点 A から別の点 B へ行く任意の 2 つの経路を APB と AQB とするとき（**図 1･14** 参照），場の力 $\boldsymbol{F}$ がなす仕事について

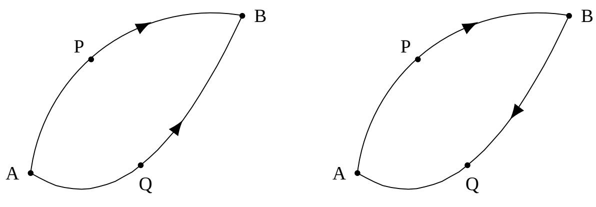
$$\int_{\mathrm{APB}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\mathrm{AQB}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1･63}$$

であれば，$\boldsymbol{F}$ は保存力である．この式は次のように書き換えることができる．質点が点 A から経路 APB を経て B にいき，経路 APB を逆にたどり A に戻るとき，場の力がなす仕事は

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{APBQA}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} &= \int_{\mathrm{APB}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_{\mathrm{BQA}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \\ &= \int_{\mathrm{APB}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} - \int_{\mathrm{AQB}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 \end{aligned} \tag{1･64}$$

である．すなわち，質点が任意の閉じた経路を一周して元の点に戻るとき，保存力がなす仕事は 0 である．閉じた経路 C を一周する積分が 0 であることを，次のように記す．

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 \tag{1･65}$$



(a) **異なる 2 つの経路**　　(b) 1 **周する経路**

図 1･14　保存力場の経路

1-10-2 位置エネルギー

保存力場の中に，基準となる点 $\boldsymbol{r}_0$ を選ぶ．基準の点は原理上はどこに選んでもよい．この

点から任意の点 $\boldsymbol{r}$ まで，保存力 $\boldsymbol{F}$ に逆らって質点を十分にゆっくりと移動させるとき，逆らう力（移動させるのに必要な力）$-\boldsymbol{F}$ のなす仕事

$$U(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} (-\boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1·66}$$

は途中の経路には依存せず，終点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ だけの関数であり，物理的に深い意味を持っている．$U(\boldsymbol{r})$ を保存力の場におけるポテンシャルという．ポテンシャル $U(\boldsymbol{r})$ は，質点を保存力に逆らって基準点から位置 $\boldsymbol{r}$ まで運ぶのに必要な仕事である．位置 $\boldsymbol{r}$ にある質点は基準点まで移動する間に仕事 $U(\boldsymbol{r})$ をなしうるので，$U(\boldsymbol{r})$ を位置 $\boldsymbol{r}$ にある質点が持つ位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）という．

ある点 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$ から別な点 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$ まで質点が移動する間に保存力のなす仕事を求めよう．仕事は途中の経路に依存しないから，基準点 $\boldsymbol{r}_0$ を通る経路を採用すると

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}}^{\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} &= \int_{\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}}^{\boldsymbol{r}_0} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \\ &= -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = U(\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}) - U(\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}})\end{aligned} \tag{1·67}$$

と求まる．すなわち，点 A と点 B における位置エネルギーの差に等しい．

1-10-3 保存力と位置エネルギーの関係

保存力と位置エネルギーの間には簡単な関係が成り立つ．質点が点 (x, y, z) から $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ まで微小変位するときに保存力のなす仕事は

$$\Delta W = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z \tag{1·68}$$

である．一方，保存力のなす仕事は両地点の位置エネルギーの差に等しいから

$$\Delta W = U(x, y, z) - U(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) \cong -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z\right) \tag{1·69}$$

が成り立つ．以上の 2 式の右辺を等しいと置いて次の関係を得る．

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{1·70}$$

ベクトルの微分演算子の記号を使って次のように表すことができる．

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}U \quad \text{または} \quad \boldsymbol{F} = -\nabla U \tag{1·71}$$

一般にベクトル量 $\boldsymbol{F}$ とスカラー量 U がこの関係式を満たすとき，U を $\boldsymbol{F}$ のポテンシャルという．

保存力と位置エネルギーの関係から，場の力は位置エネルギーが減少する向きに作用すること，位置エネルギーが極大または極小になる場所では力は 0 になることが分かる．

1-10-4 保存力場の例

（1）1 次元の力場

1 次元空間すなわち直線上において，力が位置座標 x の 1 価関数 $F(x)$ として定義されるとき，$F(x)$ は保存力である（力の方向は $F > 0$ のとき $+x$ 方向，$F < 0$ のとき $-x$ 方向）．位置エネルギーは基準点を x_0 とすると

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\,\mathrm{d}x \tag{1・72}$$

である．例えば，ばねにつながれた質点が平衡点（$x = 0$）から x 変位したとき質点に作用する力は $F(x) = -kx$ である．基準点を $x = 0$ に選ぶと，位置エネルギーは

$$U(x) = -\int_{0}^{x} (-kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2 \tag{1・73}$$

である．

（2）一様な重力場

一様な重力が作用する空間は保存力場である．鉛直上方を z 軸の正の方向に選ぶと，質量 m の質点に作用する重力は次の式で表される．

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = mg \tag{1・74}$$

ただし，g は重力加速度である．位置エネルギーの基準点を座標原点 $\mathrm{O}(0, 0, 0)$ に選ぶと，$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における位置エネルギー $U(x, y, z)$ は次の式で表される．

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= -\int_{\mathrm{O}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\left(\int_0^x F_x\,\mathrm{d}x + \int_0^y F_y\,\mathrm{d}y + \int_0^z F_z\,\mathrm{d}z\right) \\ &= -\int_0^z (-mg)\,\mathrm{d}z = mgz \end{aligned} \tag{1・75}$$

上の定積分を計算するのに経路に関する情報を必要としないということは，結果が経路に依存しないこと，すなわち場の力が保存力であることを意味している．

（3）中心力場

質点に作用する力が，定点と質点の位置を結ぶ直線上にあり，力の大きさが定点と質点の間の距離の関数として表されるとき，この力を中心力といい，中心力の場を中心力場という．以下に示すように，位置エネルギーを求める積分が途中の経路に関する情報を必要としないで求まることから，中心力場は保存力場であることが分かる．

中心力を次の式で表そう．$f(r)$ は力の大きさである．

$$\boldsymbol{F}(r) = f(r)\,\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{1・76}$$

位置エネルギーは，基準点を $\boldsymbol{r}_0$ にとると

$$U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \frac{f(r)}{r}\,\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1・77}$$

ここで，$\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = r\,\mathrm{d}s\cos\theta = r\,\mathrm{d}r$ であることに注意すると（**図 1･15** 参照），位置エネルギーは原点からの距離 r だけの関数で表され，次の式で与えられる．

$$U(r) = -\int_{r_0}^{r} \frac{f(r)}{r}\, r\,\mathrm{d}r = -\int_{r_0}^{r} f(r)\,\mathrm{d}r \tag{1･78}$$

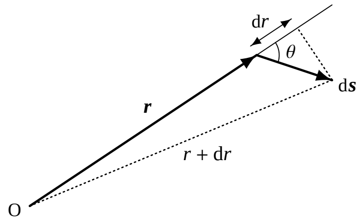


図 1･15　$\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = r\,\mathrm{d}s\cos\theta = r\,\mathrm{d}r$

例えば，3 次元の弾性力の場 $\boldsymbol{F}(r) = -k\boldsymbol{r}$ （$f(r) = -kr$) の場合には，基準点を原点にとると位置エネルギーは次の式で表される（k は弾性定数）．

$$U(r) = -\int_{0}^{r} (-kr)\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}kr^2 \tag{1･79}$$

また，逆 2 乗則の引力の場（k は定数）

$$\boldsymbol{F}(r) = -\frac{k}{r^2}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r} \quad \left(f(r) = -\frac{k}{r^2} \right) \tag{1･80}$$

の場合には，基準点を無限の遠方にとると位置エネルギーは次の式で表される．

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} \left(-\frac{k}{r^2}\right)\mathrm{d}r = -\frac{k}{r} \tag{1･81}$$

■12 群 - 4 編 - 1 章

1-11 力学的エネルギー保存則

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

力学における重要な関係式の一つ，力学的エネルギー保存則を導く．

1-11-1 力学的エネルギー保存則

質点が保存力場で運動する場合を考える．運動エネルギーの増加が質点に作用する力のなした仕事に等しいことを記述している式 (1･55) において，右辺の力（保存力）のなす仕事は出発点 $\boldsymbol{r}_\mathrm{A}$ と到達点 $\boldsymbol{r}_\mathrm{B}$ における位置エネルギーの差として表すことができるので（式 (1･67) 参照），次の式を得る．

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{B}^2 - \frac{1}{2}mv_\mathrm{A}^2 = U(\boldsymbol{r}_\mathrm{A}) - U(\boldsymbol{r}_\mathrm{B}) \tag{1･82}$$

移項して次の関係を得る．

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{A}^2 + U(\boldsymbol{r}_\mathrm{A}) = \frac{1}{2}mv_\mathrm{B}^2 + U(\boldsymbol{r}_\mathrm{B}) \tag{1･83}$$

ここに現れた運動エネルギーと位置エネルギーの和

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(\boldsymbol{r}) \tag{1･84}$$

を力学的エネルギーという．式 (1･83) は任意の 2 点における質点の力学的エネルギーが等しいことを表している．すなわち，保存力を受けて運動する質点の力学的エネルギーは時間変化せず，常に一定である．これを力学的エネルギー保存則という．

1-11-2 保存力以外の力がある場合

保存力場で運動する質点に保存力以外の力 $\boldsymbol{F}'$ が作用する場合を考えよう．保存力を $\boldsymbol{F}_\mathrm{c}$，保存力場の位置エネルギーを $U(\boldsymbol{r})$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_\mathrm{B}^2 - \frac{1}{2}mv_\mathrm{A}^2 &= \int_{\boldsymbol{r}_\mathrm{A}}^{\boldsymbol{r}_\mathrm{B}} \boldsymbol{F}_\mathrm{c}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_{\boldsymbol{r}_\mathrm{A}}^{\boldsymbol{r}_\mathrm{B}} \boldsymbol{F}'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \\ &= U(\boldsymbol{r}_\mathrm{A}) - U(\boldsymbol{r}_\mathrm{B}) + \int_{\boldsymbol{r}_\mathrm{A}}^{\boldsymbol{r}_\mathrm{B}} \boldsymbol{F}'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}\end{aligned} \tag{1･85}$$

移項して次式を得る．

$$\left(\frac{1}{2}mv_\mathrm{B}^2 + U(\boldsymbol{r}_\mathrm{B})\right) - \left(\frac{1}{2}mv_\mathrm{A}^2 + U(\boldsymbol{r}_\mathrm{A})\right) = \int_{\boldsymbol{r}_\mathrm{A}}^{\boldsymbol{r}_\mathrm{B}} \boldsymbol{F}'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1･86}$$

すなわち，力学的エネルギーの増加は保存力以外の力がなす仕事に等しい．既に述べたように，動摩擦力は常に負の仕事をするので，力学的エネルギーは減少する．

なお，質点がある曲面や曲線に沿って運動する場合に，質点が曲面や曲線から受ける垂直抗力は保存力ではないが，力の向きが運動方向と常に直角をなすので仕事をしない．したがって，質点がなめらかな曲面や曲線に束縛されている場合には，力学的エネルギー保存則が成り立つ．

■12 群 - 4 編 - 1 章

1-12 平面運動の極座標表示

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

ある場合には，直交座標より極座標の方が運動を解析するのに便利である．

1-12-1 2 次元極座標

中心力場における質点の運動を取り扱うには直交座標を用いるより極座標を用いた方が便利である．2 次元の極座標では，原点からの距離 r と方位角 θ を用いて座標点を表す．r，θ は直交座標の x，y と次の関係にある．

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{1·87}$$

1-12-2 極座標におけるベクトルの分解

2 次元極座標では任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ を動径方向（位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の方向）と方位角方向（$\boldsymbol{r}$ と直角で，θ の増加する向き）に分解する（**図 1·16** 参照）．ベクトル $\boldsymbol{A}$ の動径成分 A_r，方位角成分 A_θ と x 成分 A_x，y 成分 A_y は次の関係にある．

$$A_r = A_x\cos\theta + A_y\sin\theta \tag{1·88}$$

$$A_\theta = -A_x\sin\theta + A_y\cos\theta \tag{1·89}$$

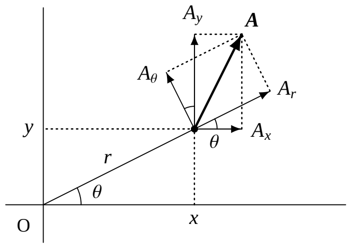


図 1·16　2 次元極座標におけるベクトルの分解

速度と加速度の動径成分と方位角成分の表式を求めよう．簡略化のために時間微分をドットを使って表す（ニュートンの記法）．例えば，$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \dot{x}$，$\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = \ddot{x}$ である．式 (1·87) を時間微分して

$$v_x = \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \tag{1·90}$$

$$v_y = \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \tag{1·91}$$

式 (1·88)，式 (1·89) の関係式を用いて，速度の動径成分と方位角成分は次式で与えられる．

$$v_r = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta = \dot{r} \tag{1·92}$$

$$v_\theta = -v_x\sin\theta + v_y\cos\theta = r\dot{\theta} \tag{1·93}$$

次に，式 (1･90)，式 (1･91) をもう一度時間微分して

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta \tag{1･94}$$

$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta \tag{1･95}$$

式 (1･88)，式 (1･89) の関係式を用いて，加速度の動径成分と方位角成分は次式で与えられる．

$$a_r = a_x\cos\theta + a_y\sin\theta = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \tag{1･96}$$

$$a_\theta = -a_x\sin\theta + a_y\cos\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right) \tag{1･97}$$

1-12-3 極座標における運動の記述

質点に作用する力を動径方向と方位角方向に分け，それぞれ F_r，F_θ と表すと，2 次元極座標における質点の運動方程式は次式で与えられる．

$$m\left\{\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} = F_r \tag{1･98}$$

$$m\left\{\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\right\} = F_\theta \tag{1･99}$$

中心力の場合には力の中心を極座標の原点に選ぶと $F_\theta = 0$ であるから，式 (1･99) によれば $r^2\,\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ は時間によらず一定である．この量は次の意味を持つ．微小時間 $\varDelta t$ の間に位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が描く図形の面積 $\varDelta S$ は，位置ベクトルの方向の変化を $\varDelta\theta$ とすると，$\varDelta S = r^2\varDelta\theta/2$ と表される（**図 1･17** 参照）ので，単位時間当たりの面積の変化は

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta S}{\varDelta t} = \frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1･100}$$

と表される．$\mathrm{d}S/\mathrm{d}t$ を面積速度という．中心力を受けて運動する質点の面積速度は一定である．なお，面積速度は角運動量の大きさ l と次の関係にある．m は質点の質量である．

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{2m} \tag{1･101}$$

中心力を受けて運動する質点の角運動量が一定であることは既に 1–3–3 項で述べた．

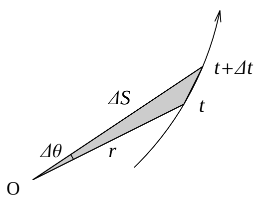


図 1･17　面積速度 $\lim_{\varDelta t\to 0}\varDelta S/\varDelta t$

■12 群 - 4 編 - 1 章

1-13 万有引力と惑星の運動

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

ニュートンによる万有引力の発見と惑星運動の解明は古典力学の一応の完成を意味した．

1-13-1 万有引力

あらゆる物体の間には物体の質量とその間の距離で決まる引力が作用している．質量 m_1，m_2 の質点が距離 r 離れて存在するとき，その間に作用する力は 2 つの質点を結ぶ直線に平行で，その大きさ F は次の式で表される．

$$F = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{1・102}$$

負号は引力であることを意味している．これを万有引力の法則といい，ニュートン（I. Newton, 1642–1727）により発見された．比例定数 G は万有引力定数と呼ばれる普遍定数であり，その値は

$$G = 6.6738 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2} \tag{1・103}$$

である．G は非常に小さいので，万有引力が問題となるのは質量が非常に大きい場合に限られる．原子や分子の間では全く何の意味も持たないが，天体の運動は完全に万有引力によって決められる．万有引力の相互作用は，電気的な相互作用と並んで自然界における最も基本的な相互作用の一つである．

球体の質量が中心の周りに球対称に分布している場合には，球体から受ける万有引力は質量が中心に集中しているとして万有引力の法則を適用してよい．地表付近の物体に作用する重力の主要な原因は物体と地球の間の万有引力である．地球の質量を M，半径を R とすると，質量 m の物体が地表で受ける重力 mg と重力加速度 g は近似的に次の式で表される．

$$mg = G\frac{Mm}{R^2} \quad \text{すなわち} \quad g = \frac{GM}{R^2} \tag{1・104}$$

1-13-2 ケプラーの法則

ケプラー（J. Kepler, 1571–1630）はチコ・ブラーエ（Tycho Brahe, 1546–1601）が残した約 20 年間にわたる惑星の観測データを解析して，惑星の運動に関する次の 3 つの法則を見出した．今日，ケプラーの法則と呼ばれている法則である．

第 1 法則 惑星の軌道は太陽を一つの焦点とする楕円である．
第 2 法則 惑星の軌道運動の面積速度は常に一定である．
第 3 法則 惑星の公転周期は楕円軌道の長径の長さの 3/2 乗に比例する．

1-13-3 ケプラーの法則の導出

ニュートンはケプラーの法則から万有引力の法則を発見したのであるが，ここでは万有引力の法則からケプラーの法則が導かれることを示そう．

太陽の質量はどの惑星の質量に比べても十分に大きいので，一つの惑星の運動を考えるときにはほかの惑星の影響を無視しよう．太陽を座標原点とする 2 次元極座標で惑星の位置を (r, θ) とすると，惑星が受ける太陽の引力の動径成分と方位角成分は

$$F_r = -G\frac{Mm}{r^2}, \quad F_\theta = 0 \tag{1・105}$$

ただし，G は万有引力定数，M は太陽の質量，m は惑星の質量である．式 (1･98)，(1･99) より，惑星の運動方程式は

$$m\left\{\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} = -G\frac{Mm}{r^2} \tag{1・106}$$

$$m\left\{\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\right\} = 0 \tag{1・107}$$

と表される．式 (1･107) より定数 h を用いて

$$r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = h \tag{1・108}$$

と書ける．h は面積速度の 2 倍である．この式がケプラーの第 2 法則を表している．

次に，式 (1･108) を用いて方程式 (1･106) から $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ を消去して r のみの方程式を得る．

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \tag{1・109}$$

この方程式を解けば r が時間の関数として求まるのであるが，ここでは軌道の形 $r = r(\theta)$ を求めよう．式 (1･108) に注意して時間微分を θ による微分に書き換える．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{h}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \tag{1・110}$$

運動方程式 (1･109) は

$$\frac{h}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right) - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \tag{1・111}$$

と変形される．整理して次式を得る．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right) - \frac{1}{r} = -\frac{GM}{h^2} \tag{1・112}$$

変数変換 $u = 1/r$ を行うと

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = u^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} \tag{1・113}$$

であるので，方程式 (1･112) は次のように書き換えられる．

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} \equiv \frac{1}{l} \tag{1・114}$$

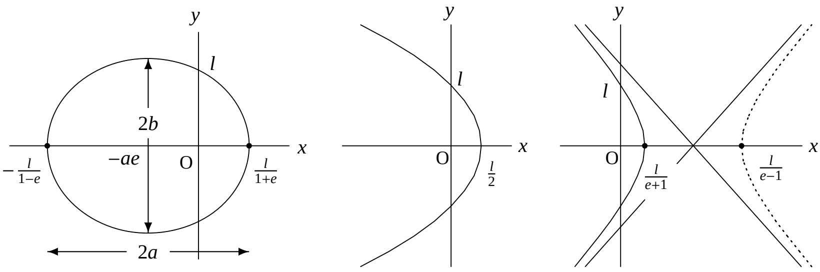
ただし，長さの次元を持つ定数 $l = h^2/GM$ を導入した．この方程式の解は容易に求まる．

$$u = A\cos(\theta + \alpha) + \frac{1}{l} \tag{1･115}$$

ただし，A と α は任意定数である．r と θ の関係に戻すと

$$r = \frac{l}{1 + e\cos(\theta + \alpha)} \tag{1･116}$$

となる．ただし，定数 A は $e = Al$ に置き換えた．この式は円錐曲線を表し，$e = 0$ のとき円，$0 < e < 1$ のとき楕円，$e = 1$ のとき放物線，$e > 1$ のとき双曲線を与える．r が有限の範囲に限られるならば軌道は円または楕円であることが分かる．これがケプラーの第 1 法則である．



(a) $0 < e < 1$ **楕円**　(b) $e = 1$ **放物線**　(c) $e > 1$ **双曲線**
点線は $r = \dfrac{l}{-1 + e\cos\theta}$

図 1･18　円錐曲線 $r = \dfrac{l}{1 + e\cos\theta}$

軌道が楕円（円を含む）となる場合，e を楕円の離心率という．楕円の長半径 a と短半径 b は離心率と次の関係にある．

$$a = \frac{l}{1 - e^2}, \quad b = \frac{l}{\sqrt{1 - e^2}} = \sqrt{al} \tag{1･117}$$

軌道の楕円が囲む面積 πab を面積速度 $h/2$ で割れば，運動の周期 T が求まる．

$$T = \frac{\pi ab}{h/2} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \tag{1･118}$$

周期が長径 $(2a)$ の 3/2 乗に比例するというケプラーの第 3 法則が導かれた．

■12 群 - 4 編 - 1 章

1-14 慣性系と非慣性系

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

1-14-1 並進座標系

慣性座標系（慣性系） O-xyz に対して座標軸の向きを一定に保ったまま移動する座標系 O′-$x'y'z'$ を考える．回転を伴わないこのような移動を並進運動という．O 系から見る質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$，O′ 系から見る位置ベクトルを $\boldsymbol{r}'$，O 系から見る O′ 系の原点 O′ の位置ベクトルを $\boldsymbol{R}$ とすると，これらのベクトルの間には次の関係がある（**図 1･19** 参照）．

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{R} \tag{1･119}$$

慣性系においては，質点の運動はニュートンの運動の第 2 法則によって記述される．

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} \tag{1･120}$$

O 系における加速度と O′ 系における加速度の間には次の関係がある．

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1･121}$$

式 (1･120)，式 (1･121) より次の式を得る．

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} - m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1･122}$$

O′ 系の並進運動の加速度 $\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}/\mathrm{d}t^2$ が 0 の場合には，O′ 系においてもニュートンの運動の第 2 法則が成り立つ．すなわち，ある慣性系に対して一定の速度で運動している座標系も慣性系である．一つの慣性系から別の慣性系への座標変換をガリレイ変換という．ガリレイ変換に対して運動方程式の形が変わらないことをガリレイの相対性原理という．慣性系は無限にたくさん存在し，すべての慣性系は対等である．

並進の加速度が 0 でない場合には，O′ 系で質点を観測すると，力が作用してない（$\boldsymbol{F} = 0$）場合でも質点の加速度 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}'/\mathrm{d}t^2$ は 0 でない．したがって，O′ 系は慣性系ではない．慣性系で

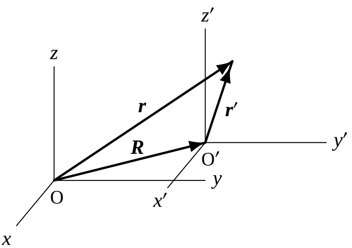


図 1･19　慣性系 O–xyz **に対して並進運動する座標系** O′–$x'y'z'$

ない座標系を非慣性系という．しかしこの場合でも，$-m\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}/\mathrm{d}t^2$ を一種の力とみなすと，式(1･122) は形式的にニュートンの運動方程式と同じ形になる．慣性系では存在しないこの力を慣性力という．

慣性力は次のように理解される．一定加速度 $\boldsymbol{a}$ で運動している乗り物内の糸に吊るされたおもりを考えよう．地上から見ると, おもりは乗り物と一緒に加速度 $\boldsymbol{a}$ で運動しているので, 運動の法則によればおもりには一定の力 $m\boldsymbol{a}$ が作用している．この力が生じるように糸は鉛直方向から傾き，糸の張力の水平成分が $m\boldsymbol{a}$ に等しくなる（**図 1･20**(a) 参照）．一方, 乗り物内から見れば糸は傾いているのにおもりは静止している．力学の法則が成り立つとすれば, おもりに作用する力は釣り合いの条件を満たさなければならない．観測される糸の傾きを説明するためには慣性力 $-m\boldsymbol{a}$ が必要なのである（図 1･20(b) 参照）.

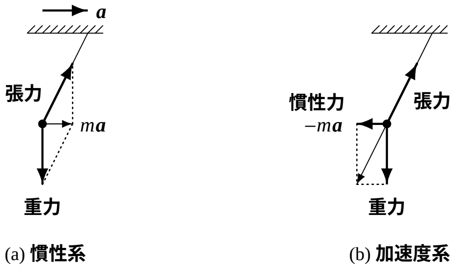


図 1･20　慣性系と加速度系

1-14-2 回転座標系

(1) 角速度ベクトル

角速度ベクトルを次の規則によって定義する．

大きさ : 単位時間当たりの回転角（スカラー量としての角速度）

方向　: 回転軸に平行で，回転の向きに右ねじを回したときに右ねじが進む方向

大きさが一定のベクトル $\boldsymbol{A}$ がある軸の周りに角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転しているとき，微小時間 Δt の間の $\boldsymbol{A}(t)$ の変化 $\Delta\boldsymbol{A}$ は，$\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{A}$ のなす角度を ϕ とすると $\Delta A \cong (A\sin\phi)\,\omega\Delta t$ である（**図**

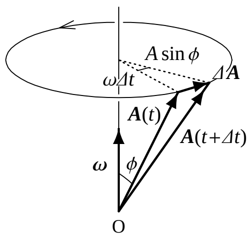


図 1･21　回転しているベクトル *A*

1･21 参照）．ベクトルの方向を考慮して $\Delta\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A}\Delta t$ と表すことができるので，次の関係が成り立つ．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A} \tag{1･123}$$

（2）回転座標系における運動方程式

慣性系 O-xyz と原点を共通にする座標系 O′-$x'y'z'$ が原点を通る軸の周りに一定の角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転しているとしよう．各座標系の座標軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ 及び $\boldsymbol{e}_x'$，$\boldsymbol{e}_y'$，$\boldsymbol{e}_z'$ とすると，O 系，O′ 系において位置ベクトルはそれぞれ

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y + z\,\boldsymbol{e}_z \tag{1･124}$$

$$\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{e}_x' + y'\boldsymbol{e}_y' + z'\boldsymbol{e}_z' \tag{1･125}$$

と表される．ただし，$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ は直交成分への分解の仕方が異なるだけで，同じベクトル $(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}')$ である．各座標系における速度と加速度は（時間微分をドットで略記する）

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\,\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\,\boldsymbol{e}_y + \dot{z}\,\boldsymbol{e}_z \tag{1･126}$$

$$\boldsymbol{v}' = \dot{x}'\boldsymbol{e}_x' + \dot{y}'\boldsymbol{e}_y' + \dot{z}'\boldsymbol{e}_z' \tag{1･127}$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{x}\,\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}\,\boldsymbol{e}_y + \ddot{z}\,\boldsymbol{e}_z \tag{1･128}$$

$$\boldsymbol{a}' = \ddot{x}'\boldsymbol{e}_x' + \ddot{y}'\boldsymbol{e}_y' + \ddot{z}'\boldsymbol{e}_z' \tag{1･129}$$

と定義される．

さて，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}'$ の関係を求めよう．回転系の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x'$，$\boldsymbol{e}_y'$，$\boldsymbol{e}_z'$ は定ベクトルではないことに注意して

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}' = \dot{x}'\boldsymbol{e}_x' + \dot{y}'\boldsymbol{e}_y' + \dot{z}'\boldsymbol{e}_z' + x'\dot{\boldsymbol{e}}_x' + y'\dot{\boldsymbol{e}}_y' + z'\dot{\boldsymbol{e}}_z' \tag{1･130}$$

$\boldsymbol{e}_x'$，$\boldsymbol{e}_y'$，$\boldsymbol{e}_z'$ は角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ で回転しているので

$$\dot{\boldsymbol{e}}_x' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_x', \quad \dot{\boldsymbol{e}}_y' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_y', \quad \dot{\boldsymbol{e}}_z' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_z' \tag{1･131}$$

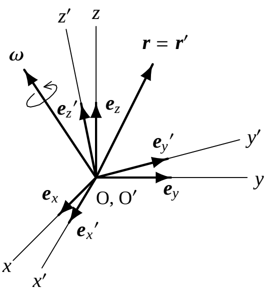


図 1･22　回転座標系 O′-$x'y'z'$

が成り立つ．以上から次の関係を得る．

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}'\boldsymbol{e}_x{}' + \dot{y}'\boldsymbol{e}_y{}' + \dot{z}'\boldsymbol{e}_z{}' + \boldsymbol{\omega} \times (x'\boldsymbol{e}_x{}' + y'\boldsymbol{e}_y{}' + z'\boldsymbol{e}_z{}') = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' \tag{1・132}$$

この両辺を時間微分すれば $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{a}'$ の関係を求めることができる．関係式 $\dot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'$ を導いたのと同様に $\dot{\boldsymbol{v}}' = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$ を導くことができる．これらを使って次の関係を得る．

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{v}}' + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') \tag{1・133}$$

慣性系における運動方程式 $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ に式 (1・133) を代入して，回転座標系における “運動方程式” を得る．

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') \tag{1・134}$$

右辺の第 2 項以下が回転座標系で現れる慣性力で，第 2 項をコリオリの力，第 3 項を遠心力という．

(3) 遠心力

回転座標系で静止している物体に作用する慣性力は遠心力だけである．遠心力 $-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')$ の方向は回転軸に垂直で回転軸から離れる向き，大きさは $m(r' \sin\phi)\omega^2$ である．ただし，ϕ は回転軸 ($\boldsymbol{\omega}$ の方向) と位置ベクトル $\boldsymbol{r}'$ のなす角度である．質点と回転軸の間の距離 $l = r' \sin\phi$ を使うと，遠心力の大きさは $ml\omega^2$ と表される．

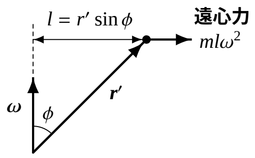


図 1･23　遠心力

(4) コリオリの力

コリオリの力は，回転座標系で運動している物体に作用する慣性力である．コリオリの力 $-2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$ あるいは $2m\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega}$ は回転軸と速度 $\boldsymbol{v}'$ の作る面に垂直であり，その大きさは回転軸と速度 $\boldsymbol{v}'$ のなす角度を φ とすると $2m\omega v' \sin\varphi$ である．

コリオリの力は物体の速度の方向と常に垂直なので物体に対して何の仕事もしない．すなわち，コリオリの力は運動の向きを変えるだけで速度の大きさは変えない．

地球の自転はゆっくりしており，生じる慣性力は比較的小さいので，地球に固定した座標系は近似的に慣性系とみなすことができるが，厳密には慣性系ではない．自転による遠心力は赤道上で最大となり，質量 1 kg の物体に対して 0.034 N であり，物体の重さ (約 9.8 N) を 0.3% 減少させる．

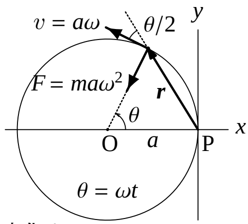
地表付近で運動する物体に作用するコリオリの力は非常に小さいので（速さ 10 m/s で運動している質量 1 kg の物体に作用するコリオリの力は最大でも 1.5×10^{-3} N)，通常は無視されるが，気象現象においては重要な役割を果たす．例えば，低気圧，高気圧の周りの風が圧力の高い方から低い方へ放射状に吹かないで，北半球では右側へずれるのはコリオリの力の影響である．

■12 群 - 4 編 - 1 章

1-15 演習問題

（執筆者：伊東敏雄）［2015 年 6 月 受領］

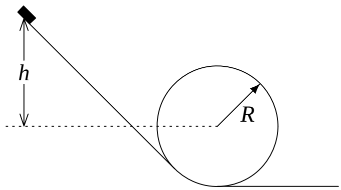
1. 質量 m の質点が半径 a の円周上を一定の角速度 ω で運動している．質点は時刻 $t = 0$ に円周上の点 P を通過した．P 点の周りの 質点の角運動量の大きさ $L(t)$ 及び P 点の周りの質点に作用する力のモーメントの大きさ $N(t)$ を求めよ．



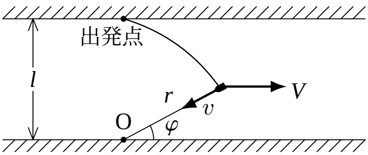
2. x 方向の一様な電場が時間とともに $E(t) = -E_0 \sin \omega t$ と変化する．$t = 0$ で $x = 0$ を初速度 0 で出発した電子（質量 m，電荷 $-e$）はどのような運動をするか．電場中の電子の受ける力は $F = -eE$ である．
3. 鉛直上方に初速度 v_0 で投げ上げたボールが速さの 2 乗に比例する抵抗を受けて運動し，最高点を経て再び元の位置まで落ちてきたときのボールの速さを v_1 とする．十分に時間が経った後の落下速度を v_t とすると，次の関係が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{{v_1}^2} = \frac{1}{{v_0}^2} + \frac{1}{{v_t}^2}$$

4. 長さ l の軽い棒の先端に質量 m の質点を結び付けた振り子がある．この振り子を水平な位置に持ってきて，静かに放した．振り子が鉛直下方と角度 φ をなす位置にきたときの角速度 $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ を求めよ．この振り子の振動の周期は，最下点付近の微小振動の周期のおよそ何倍か．ただし，$\int_0^{\pi/2}(1/\sqrt{\cos\varphi})\,\mathrm{d}\varphi \cong 2.6221$ である．
5. 半径 R の円形ループを含むジェットコースターがあり，ループの天頂でちょうど無重力状態になるという．すべり始める点とループの中心との高さの差 h を求めよ．このジェットコースターは円形部分を 1 周して水平部分に入る．ジェットコースターに作用する垂直抗力はどうのように変化するか．なお，摩擦はないとする．



6. 速度 V で一様に流れている川の岸辺から常に対岸の定点 O を目指して速度 v で進む舟はどのような軌跡を描くか．極座標を使うと便利である．



7. 質量 m の物体を地表から初速度 v_0 で鉛直上方に投射した．地表における重力加速度 g，地球の半径 R を用いて以下の問に答えよ．ただし，物体は地球からの万有引力だけを受けて運動するものとし，地球の自転の影響は考えない．

(1) 物体が地上に落ちてこないための v_0 の最小値 v_m を求めよ．

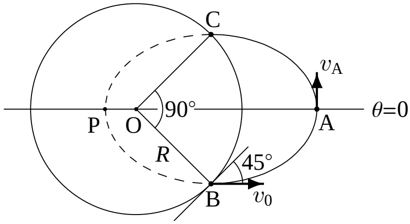
(2) $v_0 < v_\mathrm{m}$ の場合に高度 x における物体の速度 v と最高到達点の高度 h を求めよ．

(3) $v_0 = v_\mathrm{m}$ の場合に高度 x まで物体が飛行するに要する時間 t を求めよ．

(4) $v = v_\mathrm{m}$ で打ち出した物体が $x = 60R$ を飛行するための時間 (hour) を数値計算せよ．$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$，$R = 6.4\times10^6\,\mathrm{km}$ を使え，$60R$ は月までのおおよその距離である．

8. 公表される人工衛星の遠地点と近地点の高度から地心より遠地点と近地点までの距離 r_A と r_P がわかる．これより遠地点と近地点における速さ v_A と v_P 及び運動の周期 T を求めよ．ただし，地球の半径 R，地表における重力加速度を g とする．

9. 地表の点 B から水平と角度 45° の方向に発射された投射体が最高点 A を通り，地球を 1/4 周した地点 C に落下した．地球の自転の影響はないとして以下に答えよ．地表における重力加速度を g，地球の半径を R とする．



(1) 初速度を v_0 として最高点 A における投射体の速度 v_A と地心からの距離 $r_\mathrm{A} \equiv \overline{\mathrm{OA}}$ を v_0, g，R を用いて表せ（面積速度一定の原理と力学的エネルギー保存則を使う）．

(2) 軌道の楕円を極座標の式 $r = l/(1 - e\cos\theta)$ で表す．l，e について次式の関係が成り立つことを示せ．

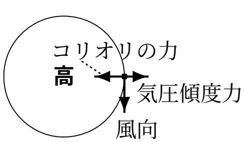
$$l = \frac{{v_0}^2}{2g}, \quad e = \frac{1}{gR}\sqrt{(gR)^2 - gR{v_0}^2 + \frac{{v_0}^4}{2}}$$

(3) $\theta = \pm45°$ に $r = R$ であることから $R = l/(1 - e\cos45°)$ の関係がある．この関係を使って v_0 を求め，l，e，v_A，r_A を g, R を用いて表せ．

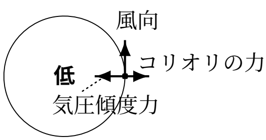
(4) 投射体が B から C まで飛行する所要時間 T を求めよ．

(5) v_0，v_A，$r_\mathrm{A} - R$（A 点の高度），T を数値計算せよ．

10. 大気圧が水平面内で定常的な円運動をしているとしよう．中心から半径 r の円周上の気圧を p，円周に沿っての大気の流れの速さを v とする．$\mathrm{d}p/\mathrm{d}r < 0$ の場合は高気圧であり，大気の流れは時計回り，$\mathrm{d}p/\mathrm{d}r > 0$ の場合は低気圧をであり，大気の流れは反時計回りとなる．大気の単位体積当たりには，気圧の勾配による気圧傾度力 $|\mathrm{d}p/\mathrm{d}r|$ とコリオリの力 $2\rho\omega v\sin\theta$ が図のように作用する．これらの合力が円運動の向心力 $\rho v^2/r$ を与えると考えて，高気圧と低気圧の場合について，それぞれ大気の流れの速さ（風速）v を r と $|\mathrm{d}p/\mathrm{d}r|$ を使って表せ（v についての 2 次方程式を解くと解は 2 つ出てくるが，$\mathrm{d}p/\mathrm{d}r = 0$ のとき $v = 0$ となる方を採用せよ）．大気の密度 ρ は一定とする．この結果から “高気圧の台風” はあり得ないことを説明せよ．



(a) 高気圧の場合



(b) 低気圧の場合

解答

1. $L(t) = 2ma^2\omega\sin^2(\omega t/2)$ ，　$N(t) = ma^2\omega^2\sin(\omega t)$
2. $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = eE_0\sin\omega t$ より初期条件を考慮して $x = \dfrac{eE_0}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)$
3. 質量を m ，速度の 2 乗に比例する抵抗力の大きさを mkv^2 とすると運動方程式は $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg \pm mkv^2$（複号は + 下降時，− 上昇時）．$v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$v_t = \sqrt{\dfrac{g}{k}}$ であるから $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{k({v_t}^2 \mp v^2)}{v}$．上昇時は $x = 0$ で $v = v_0$ より $x = \dfrac{1}{2k}\log\dfrac{{v_t}^2 + {v_0}^2}{{v_t}^2 + v^2}$，最高点の高度は $h = \dfrac{1}{2k}\log\Bigl(1 + \dfrac{{v_0}^2}{{v_t}^2}\Bigr)$．下降時は $x = h$ で $v = 0$ より $x = \dfrac{1}{2k}\log\Bigl(1 + \dfrac{{v_0}^2}{{v_t}^2}\Bigr)\Bigl(1 - \dfrac{v^2}{{v_t}^2}\Bigr)$．これより $x = 0$ のときの関係から与式を得る．
4. エネルギー保存則 $\dfrac{1}{2}ml^2\Bigl(\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\Bigr)^2 = mgl\cos\varphi$ より $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\dfrac{2g}{l}\cos\varphi}$，$\varphi$ が 0 から $\pi/2$ に到る時間の 4 倍が周期であるから $T = 4\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{\dfrac{l}{2g}}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}} \cong 5.244\sqrt{\dfrac{2l}{g}}$ を得る．微小振動の周期 $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ との比は $\dfrac{T}{T_0} = \dfrac{5.244\sqrt{2}}{2\pi} \cong 1.17$
5. ループの頂点で $mv^2/R \geqq mg$, エネルギー保存則 $mg\,(h{-}R) = mv^2/2$, 以上から $h = 3R/2$. 斜面の傾きを θ とすると斜面を滑っているときの垂直抗力は $mg\cos\theta$，円形ループに入ると不連続に $3mg(1+\cos\theta)$ に，ループの最下点で最大値 $6mg$，中心と同じ高さの円周上で $3mg$，頂点で 0 になり，再びループの最下点で $6mg$ まで増加，水平部分に入ると不連続に mg となる．
6. 舟の速さは極座標成分で $v_r = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -v + V\cos\varphi$，$v_\varphi = r\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -V\sin\varphi$，これより $\dfrac{v_r}{v_\varphi} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \dfrac{v}{V\sin\varphi} - \cot\varphi$，積分して $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ において $r = l$ であることから，舟の軌跡は極座標で $r = \dfrac{l\,\{\tan(\varphi/2)\}^{v/V-1}}{1+\cos\varphi}$．
7. (1) 万有引力の位置エネルギーは $-mgR^2/(R+x)$ と表される．無限遠で速度が 0 となる条件 $m{v_\mathrm{m}}^2/2 - mgR = 0$ より $v_\mathrm{m} = \sqrt{2gR}$

   (2) エネルギー保存則 $\dfrac{1}{2}m{v_0}^2 - mgR = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{mgR^2}{R+x}$ より
   $$v = \sqrt{{v_0}^2 - \frac{2gRx}{R+x}},\quad h = \frac{R{v_0}^2}{2gR - {v_0}^2}$$
   (3) $t = \displaystyle\int_0^x \dfrac{\mathrm{d}x}{v(x)} = \int_0^x \sqrt{\dfrac{R+x}{2gR^2}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{R}{2g}}\left\{\Bigl(1+\dfrac{x}{R}\Bigr)^{3/2} - 1\right\}$

   (4) $t = 1.81\times10^5\,\mathrm{s} = 50.4\,\mathrm{h}$
8. 遠地点，近地点における面積速度が等しいこと $r_\mathrm{A}v_\mathrm{A}/2 = r_\mathrm{P}v_\mathrm{P}/2$，力学的エネルギーが等しいこと $m{v_\mathrm{A}}^2/2 - mgR^2/r_\mathrm{A} = m{v_\mathrm{P}}^2/2 - mgR^2/r_\mathrm{P}$ より
   $$v_\mathrm{A} = \sqrt{\frac{2gR^2r_\mathrm{P}}{r_\mathrm{A}(r_\mathrm{A}+r_\mathrm{P})}},\quad v_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{2gR^2r_\mathrm{A}}{r_\mathrm{P}(r_\mathrm{A}+r_\mathrm{P})}}.$$
   周期は楕円の面積 $\pi\sqrt{r_\mathrm{A}r_\mathrm{P}}\dfrac{r_\mathrm{A}+r_\mathrm{P}}{2}$ を面積速度 $\dfrac{r_\mathrm{A}v_\mathrm{A}}{2}$ で割って $T = \dfrac{\pi(r_\mathrm{A}+r_\mathrm{P})^{3/2}}{\sqrt{2gR^2}}$

9. (1) 面積速度が等しいことより $Rv_0 \cos 45^\circ = r_A v_A$，力学的エネルギーが等しいこと $\dfrac{1}{2}m{v_0}^2 - mgR = \dfrac{1}{2}m{v_A}^2 - \dfrac{mgR^2}{r_A}$，以上から

$$v_A = \frac{\sqrt{2}}{v_0}\left(gR - \sqrt{g^2R^2 - gR{v_0}^2 + \frac{{v_0}^2}{2}}\right),\ r_A = \frac{gR + \sqrt{g^2R^2 - gR{v_0}^2 + {v_0}^2/2}}{2gR - {v_0}^2}R$$

なお，もう一つの解は $r_P = \dfrac{gR - \sqrt{g^2R^2 - gR{v_0}^2 + {v_0}^2/2}}{2gR - {v_0}^2}R$ に対応する．

(2) $l = \dfrac{2r_A r_P}{r_A + r_P}$，$e = \dfrac{r_A - r_P}{r_A + r_P}$ より求まる．

(3) $v_0 = \sqrt{gR}$，$l = \dfrac{R}{2}$，$e = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$r_A = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)R$，$v_A = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2gR}$

(4) 図形 BACOB の面積 $\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}R^2 + \dfrac{1}{2}R^2 = \dfrac{R^2}{2}\left(1 + \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ を

面積速度 $\dfrac{1}{2}Rv_0 \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{gR^3}}{2\sqrt{2}}$ で割って $T = \sqrt{\dfrac{2R}{g}}\left(1 + \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$

(5) $v_0 = \sqrt{gR} = 7.92 \times 10^3$ m/s，$v_A = 3.28 \times 10^3$ m/s，$r_A - R = 4.5 \times 10^6$ km，$T = 3.68 \times 10^3$ s (1 時間 1 分)

10. 高気圧の場合，コリオリの力から気圧傾度力を引いたものが向心力に等しいことから $\mathrm{d}p/\mathrm{d}r < 0$ に注意して $\rho v^2/r = 2\rho\omega v \sin\theta - |\mathrm{d}p/\mathrm{d}r|$ を得る．2 次方程式を解いて $\mathrm{d}p/\mathrm{d}r = 0$ のとき $v = 0$ となる解を選ぶと

$$v = r\omega \sin\theta - \sqrt{(r\omega \sin\theta)^2 - \frac{r}{\rho}\left|\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right|}$$

低気圧の場合，気圧傾度力からコリオリの力を引いたものが向心力に等しいことから $\rho v^2/r = \mathrm{d}p/\mathrm{d}r - 2\rho\omega v \sin\theta$，この 2 次方程式を解いて $\mathrm{d}p/\mathrm{d}r = 0$ のとき $v = 0$ となる解を選ぶと

$$v = -r\omega \sin\theta + \sqrt{(r\omega \sin\theta)^2 + \frac{r}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}}$$

高気圧の場合には気圧傾度 $|\mathrm{d}p/\mathrm{d}r|$ は $\rho r\omega^2 \sin^2\theta$ より大きくなることはなく，風速は $r\omega \sin\theta$ より速くなることはない．低気圧ではこのような上限はなく，いくらでも大きくなりうる．