■12 群（電子情報通信基礎）－ 2 編（離散数学）

3 章 グラフ理論

（執筆者：高橋俊彦）［2011 年 7 月 受領］

■概要■

グラフ理論の起源は Euler による Königsberg の橋問題（1736 年）といわれるが，数学の 1 分野として認知され始めたのは 1900 年代半ばあたりである．Berge は 1970 年に自著のまえがきで，グラフが電気回路，化学，社会心理学，経済学などの分野で利用され，グラフ理論の体系が形成されてきたとし，特に『オペレーションズ・リサーチの専門家達の努力がなかったらば，そして実際的な動機づけがなかったらば，グラフ理論が一つの統一的な抽象理論として現在のような形をとることはできなかったであろう』と述べているが*，当時，グラフ理論が既に ‘統一的な抽象理論’ であったというのは，いささか過大評価の感がある．特に日本では数学を専門とする人々からは体系だった理論でない，という批判を受けていたようである．しかしながら，グラフは図形として数学の研究対象であるだけでなく，組合せ構造のモデルとして数学以外の分野で広く受け入れられたことで，グラフ理論が発展してきたことは間違いない．

Berge のテキストから半世紀以上を過ぎ，Robertson と Seymour の仕事に代表されるように，グラフ理論を理論として高めるような深遠な結果や手法がいくつも現れた．現在では，グラフ理論は ‘統一的な抽象理論’ として認められるのに相応しいものとなったといえよう．

【本章の構成】

3-1 節ではグラフの定義に始まり，基本的な用語や概念を与える．ただし，グラフ・マイナー定理など新しい結果も紹介している．

3-2 節は木，3-3 節はマッチングと辺彩色に関する古典的結果である．

3-4 節は点彩色であるが，理想グラフに関する結果を含めている．

3-5 節は平面グラフに関する結果であるが，グラフ理論の結果のなかでも古いものが多い．

紙面の制約もあり，本章では有向グラフに関する結果及び位相幾何学的グラフ理論に関する新しい結果は含まれていない（ただし，3-1-1(3) で有向グラフの定義のみは与えている）．

また，本章の内容は一部を除き標準的なグラフ理論のテキストに含まれるものであり，個々の定理に対する参考文献を明示していないことをお断りしておく．

* C. Berge（著）, 伊理正夫, 岩坪秀一, 佐藤創, 伊理由美, 小林欣吾, 星守（翻訳）, “グラフの理論 I-III,” サイエンスライブラリ数学 15, サイエンス社, 1976.

■12 群 - 2 編 - 3 章

3-1 グラフ

（執筆者：高橋俊彦）［2011 年 7 月 受領］

3-1-1 グラフの定義

(1) 多重グラフ

点（point）の有限集合 V と V の 2 点（同一の点であってもよい）を結ぶ曲線の集合 E からなる図形を多重グラフ（multigraph）$G=(V,E)$ と呼ぶ．ただし，各曲線はそれが結ぶ 2 点以外の V の点を通らず，また互いに交わらないものとする．V の要素である点を頂点あるいは単に点（vertex），E の要素である曲線を辺あるいは枝（edge）と呼ぶ．V 及び E をそれぞれ頂点集合（vetex set）及び辺集合（edge set）と呼ぶ．また，頂点数 $|V|$ を G の位数（order），辺数 $|E|$ をサイズ（size）と呼ぶ．

グラフ理論においては，（頂点の位置や辺の形状に関係なく）同一の頂点集合 V と辺集合 E をもち，かつ各辺が結ぶ頂点対が等しい多重グラフは同じものとみなす．すなわち，多重グラフ $G=(V,E)$ は各辺にそれが結ぶ端点（end vertices）を対応させる写像 $\varphi : E \to [V]^1 \cup [V]^2$ によって定められる（ここで，$[V]^1$ 及び $[V]^2$ はそれぞれ V の 1 要素及び 2 要素部分集合の族を表す）．したがって，互いに素な有限集合 V と E の対 $G=(V,E)$ と写像 $\varphi : E \to [V]^1 \cup [V]^2$ の組を多重グラフと定義してもよい．本章では二つの定義を共に用いることとする．後者の定義においては集合 V 及び E の要素はもはや点や曲線である必要はなく，したがってグラフは空間図形ではない．これを抽象グラフ（abstract graph）と呼ぶ．

(2) 単純グラフ

多重グラフの異なる 2 辺 e_1, e_2 が同じ頂点対を結ぶとき，すなわち $\varphi(e_1)=\varphi(e_2)$ であるとき，e_1, e_2 を多重辺（multi edge）と呼ぶ．また，同一の頂点を結ぶ辺を自己閉路（self-loop）と呼ぶ．多重辺も自己閉路も含まない多重グラフを単純グラフ（simple graph）と呼ぶ．

単純グラフでは辺 e に対し，$\varphi(e) \in [V]^2$ が一意に定まる．したがって，e と $\varphi(e) \in [V]^2$ を同一視することができる．これより，単純グラフ $G=(V,E)$ は非空の有限集合 V とその 2 要素部分集合の集合 $E \subseteq [V]^2$ で定義できる．簡単のため，文脈より明らかなときは，$e=\{u,v\}$ を $e=(u,v)$ あるいは $e=uv$ とも表す．この記法は G が多重グラフの場合にも使用することがある．このとき，頂点 u,v を結ぶ多重辺はすべて (u,v) あるいは uv と表されるため，多重辺を区別する必要のないときにのみ使用するように注意が必要である．

(3) 有向グラフ

多重グラフ $G=(V,E)$ の各辺に向きを定めたものを有向グラフ（directed graph あるいは digraph）と呼ぶ．このとき，辺に端点を対応させる写像は $\varphi : E \to V \times V$ となる．また，$\varphi(e)=(u,v)$ であるとき，u を e の始点，v を e の終点と呼ぶ．有向グラフの辺は弧（arc）あるいは有向辺（directed edge）と呼ばれる．有向グラフに対して，辺に向きを定めないグラフは無向グラフ（undirected graph）と呼ばれる．

3-1-2 次　数

(1) 多重グラフの次数

$e=uv$ を多重グラフ $G=(V,E)$ の辺とする．このとき，辺 e は u あるいは v に接続する

(incident) という．また，u は v に（あるいは v は u に）隣接する（adjacent）といい, u は v の（v は u の）隣接点と呼ばれる．

頂点 v に対し，v に隣接する頂点の集合を v の近傍と呼び，$N_G(v)$ と表す．文脈より明らかな場合は $N(v)$ と書く．なお，頂点集合 $S \subseteq V$ に対しても近傍を定義する: $\bigcup_{v \in S} N(v) - S$ を S の近傍と呼び，同様に $N_G(S)$ あるいは $N(S)$ で表す．

頂点 v に対し，v に接続する辺の数を v の次数（degree）と呼び, $d_G(v)$, あるいは文脈より明らかな場合は単に $d(v)$ と表す．G における次数の最小値及び最大値をそれぞれ最小次数（minimum degree）$\delta(G)$ 及び最大次数（maximum degree）$\Delta(G)$ と呼ぶ．次数 0 の頂点は孤立点（isolated vertex）と呼ばれる．

握手補題 多重グラフ $G = (V, E)$ に対し，$2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$.

補題より，次数が奇数の頂点は偶数個存在することが分かる．

次数の平均値 $\frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$ をグラフ G の平均次数（average degree）と呼び，$d(G)$ で表す．自明に，$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$ が成り立つ．また，握手補題より，$d(G) = 2|E|/|V|$ である．

(2) 単純グラフの次数に関する性質

単純グラフ $G = (V, E)$ において $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とする．各頂点 v_i の次数 $d(v_i)$ を並べてできる列 $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$ を G の次数列（degree sequence）と呼ぶ．一方，数列 $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ が次数列となるグラフが存在するとき，数列はグラフ的（graphical）と呼ばれる．

与えられた数列がグラフ的であるための必要十分条件が知られている．

定理（Erdös-Gallai, 1960）$d_1 \geq d_2 \geq d_n$ を満たす自然数の列 $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ がグラフ的であるための必要十分条件は $\sum_{i=1}^{n} d_i$ が偶数であり，かつ $1 \leq k \leq n$ である任意の k に対し $\sum_{i=1}^{n} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{d_i, k\}$ が成り立つことである．

定理（Havel, 1955; Hakimi, 1962）$d_1 \geq d_2 \geq d_n$ を満たす自然数の列 $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ に対し, $d' = (d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$ とする．このとき，d がグラフ的であることの必要十分条件は d' がグラフ的であることである．

後者の定理は与えられた数列がグラフ的であるか否かを判定する再帰アルゴリズムを与える．

3-1-3 同型性

二つのグラフ $G = (V, E)$ 及び $G' = (V', E')$ に対し, V から V' への全単射 ϕ ですべての $u, v \in V$ に対して，$uv \in E \Leftrightarrow \phi(u)\phi(v) \in E'$ となるものが存在するとき，G と G' は同型である（isomorphic）といい，$G \cong G'$ と書く．

与えられた二つのグラフが同型であるか否かを判定する問題はグラフ同型性判定問題（graph isomorphism problem）と呼ばれている計算量理論の未解決問題である：多項式時間の判定アルゴリズムも知られていないし, NP 完全性も証明されていない．

一方，与えられたグラフ G 及び H に対し，G が H を部分グラフとして含むか否かを判定する部分グラフ同型性判定問題（subgraph isomorphism problem）は NP 完全である．

3-1-4 部分グラフ

グラフ $G = (V, E)$ に対し, グラフ $H = (V', E'), V' \subseteq V, E' \subseteq E$ を G の部分グラフ（subgraph）

と呼ぶ．また，G を H の拡大グラフ（supergraph）と呼ぶ．特に $E' = \{uv \mid u, v \in V', uv \in E\}$ である，すなわち E' が V' に属する 2 頂点を結ぶ E の辺すべてからなる集合であるとき，H を V' による G の誘導部分グラフ（induced subgraph）と呼び，$H = G[V']$ と書く．また，$V' = V$ であるとき，H を G の全域部分グラフ（spanning subgraph）と呼ぶ．

辺集合 $F \subseteq E$ に対して，$E' = E - F$ であるとき, 部分グラフ $H = (V, E')$ を $G - F$ と書く．同様に，頂点集合 $U \subseteq V$ に対して，$G[V - U]$ を $G - U$ と書く．更に，F あるいは U がそれぞれ一つの辺 e あるいは一つの頂点 v であるとき, $G - \{e\}$, $G - \{v\}$ を簡単に $G - e$, $G - v$ と書く．

3-1-5 マイナー

$G = (V, E)$ を単純グラフとする．辺 $e = uv \in E$ を両端点 u,v が 1 点になるまで縮めることを，e の縮約（contraction）と呼ぶ．縮約の結果得られたグラフを G/e と表記する．形式的には G/e は以下で定義されるグラフである．$G/e = (V', E')$, $V' = V - \{u, v\} \cup \{v_e\}$, $E' = \{xy \in E \mid x, y \notin \{u, v\}\} \cup \{v_e x \mid x \in N(u) \cup N(v) - \{u, v\}\}$, $v_e \notin V$.

グラフ G のある部分グラフに 0 回以上の辺の縮約を行ってグラフ H が得られるとき，H を G のマイナー（minor）と呼び，$H \leq G$ と表す．

Robertson と Seymour による次の結果はグラフ理論の金字塔である．

グラフ・マイナー定理（Robertson-Seymour, 1983–2004）グラフの無限集合はマイナー関係にある二つのグラフを含む．

グラフに関するある性質を P とする．グラフ G が性質 P を満たすならば，G の任意のマイナー H も性質 P を満たすとき, 性質 P はマイナーに関して閉じている（closed）という．マイナーに関して閉じた性質 P を満たさないような極小のグラフ F（任意の $H \leq F, H \not\cong F$ が性質 P を満たすような F）を禁止マイナー（forbidden minor）と呼ぶ．

グラフ・マイナー定理の系として以下が成り立つ．

系（Robertson-Seymour）マイナーに関して閉じた性質 P を満たすグラフの集合の禁止マイナーは有限個である．

系はグラフ G が性質 P を満たすか否かを多項式時間で判定できることを示している．

3-1-6 細分と位相的マイナー

グラフ $G = (V, E)$ の辺 $e = uv$ を二つの辺 uw,wv $(w \notin V)$ で置き換えたものを e の細分（subdivision）という．G に 0 回以上の細分を行って得られるグラフ H は G に位相同型であるという．また，G のある部分グラフが H に 0 回以上の辺の細分を行ったグラフとなるとき，H を G の位相的マイナー（topological minor）と呼ぶ．

定理 G の位相的マイナーは G のマイナーである．

定理 H を $\Delta(H) \leq 3$ である G のマイナーとする．このとき，H は G の位相的マイナーでもある．

3-1-7 道と閉路

グラフ $G = (V, E)$ における頂点と辺の交互列 $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots v_{k-1} e_k v_k (v_{i-1} v_i = e_k, i = 1, \ldots, k)$ を頂点 v_0 から v_k への歩道（walk）と呼ぶ．頂点 v_0 及び v_k をそれぞれ歩道の始点及び終点

といい，それ以外の頂点を内点と呼ぶ．また k を歩道の長さ（length）という．

すべての辺が異なる歩道をトレイル（trail）と呼ぶ．$v_0 = v_k$ のとき，その歩道は閉じているという．閉じたトレイルは回路（circuit）と呼ばれる．

すべての頂点が異なる（ただし $v_0 = v_k$ でもよい）歩道を道（path）と呼ぶ．$v_0 = v_k$ である道を閉路あるいはサイクル（cycle）と呼ぶ.

グラフ G に含まれる長さ最小の閉路を G の内周（girth），長さ最大の閉路を G の外周（circumference）と呼ぶ．ただし，G が閉路を含まないとき，内周は 0，外周は ∞ とする．

3-1-8 オイラー・グラフとハミルトン・グラフ

(1) オイラー・グラフ

グラフ $G = (V, E)$ において E の各辺をちょうど 1 本ずつ含む回路が存在するとき，G をオイラー・グラフ（Eulerian graph），その回路をオイラー回路（Euler circuit）と呼ぶ.

定理（Euler, 1937）グラフ G がオイラー・グラフであるための必要十分条件は G が連結であり，かつすべての頂点の次数が偶数であることである．

(2) ハミルトン・グラフ

グラフ $G = (V, E)$ において V の各頂点をちょうど一つずつ含む閉路が存在するとき，G をハミルトン・グラフ（Hamiltonian graph），その閉路をハミルトン閉路（Hamilton cycle）と呼ぶ．グラフ G がハミルトン・グラフであるか否かを判定する問題（ハミルトン閉路問題）は NP 完全である，しかし，以下に示すように次数に基づいたグラフ G がハミルトン・グラフであるための十分条件は数多く与えられている（三つの十分条件は下に行くほど強い).

十分条件（Dirac, 1951）3 頂点以上のグラフ $G = (V, E)$ において，$\delta(G) \geq |V|/2$.

十分条件（Ore, 1960）3 頂点以上のグラフ $G = (V, E)$ において，任意の非隣接な 2 頂点 u と v に対し，$d(u) + d(v) \geq |V|$.

十分条件（Chvátal, 1972）3 頂点以上のグラフ $G = (V, E)$ において，その次数列を $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_{|V|}$ とする．このとき，各 $k \leq |V|/2$ に対し，$d_k \geq k + 1$ あるいは $d_{|V|-k} \geq |V| - k$.

以下の定理は上記の十分条件を導くための有用な道具である．

定理（Bondy-Chvátal, 1976）G を 3 頂点以上のグラフ，u, v を $d(u) + d(v) \geq |V|$ である 2 頂点とする．このとき，G がハミルトン・グラフであるための必要十分条件は G に辺 uv を加えて得られるグラフがハミルトン・グラフであることである．

3-1-9 連結性

(1) 連結性

頂点 u から v への道が存在するとき，u と v は連結している（connected）という．G の任意の 2 頂点が連結しているとき，G を連結グラフ（connected graph）と呼ぶ.

グラフ G の極大な連結部分グラフ H を G の（連結）成分（connected component）と呼ぶ.

(2) カットと分離集合

頂点集合 V の分割 $(S, V - S)$ をカット（cut）と呼ぶ．S 及び $V - S$ に端点を持つ辺の集合 $F = \{uv \mid u \in S, v \in V - S, uv \in E\}$ が空でないとき, $G - F$ の連結成分数は G より大きくなる．このとき，辺集合 $F \subseteq E$ もカット（cut）と呼ばれる．

（3）連結度と Menger の定理

極小なカット，すなわちどの真部分集合 $F' \subset F$ に対しても，$G - F'$ の連結成分数が G と同じであるようなカットをカットセット（cutset）と呼ぶ．カットセットが 1 辺 e のみからなるとき，e を橋（bridge）と呼ぶ．G の最小カットセットの辺数を G の辺連結度（edge connectivity）と呼び，$\lambda(G)$ と書く．$\lambda(G) \geq k$ であるグラフ G は k-辺連結（k-edge connected）であるという．

$G - U$ の連結成分数が G より大きくなるような頂点集合 $U \subseteq E$ を分離集合（separating set）と呼ぶ．分離集合が 1 頂点 v からなるとき，v をカット点（cut vertex）と呼ぶ．完全グラフ〔本章 3-1-11(2) 参照〕でない連結グラフ G に対して，その最小分離集合の頂点数を G の（点）連結度（(vertex）connectivity）と呼び，$\kappa(G)$ と書く．また，非連結グラフ G に対しては $\kappa(G) = 0$，完全グラフ K_n に対しては（分離集合が存在せず）$\kappa(K_n) = n - 1$ とそれぞれ定める．$\kappa(G) \geq k$ であるグラフ G は k-連結（k-connected）であるという．

定理（Menger, 1927）グラフ $G = (V, E)$ の非隣接な 2 頂点 u と v に対する分離集合の最小サイズは u から v へのどの二つも内点を共有しない道の最大数に等しい．

系 グラフ G が k-連結であるための必要十分条件は，G の任意の 2 頂点の間にどの二つも内点を共有しない k 本の道が存在することである．

系 グラフ G が k-辺連結であるための必要十分条件は，G の任意の 2 頂点の間にどの二つも辺を共有しない k 本の道が存在することである．

3-1-10 距離と中心

グラフ $G = (V, E)$ を単純グラフとする．2 頂点 $u, v \in V$ 間の最も短い道の辺数を u と v の距離と呼び，$d(u, v)$ で表す．ただし，u, v 間に道が存在しない，すなわち，それぞれ異なる連結成分に属している場合は $d(u, v) = \infty$ と定義する．$d(u, v)$ は距離公理を満たす，すなわち，(i) 任意の頂点 u に対し，$d(u, u) = 0$，(ii) 任意の頂点 u, v, w に対し，$d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$，(iii) 任意の頂点 u, v に対し，$d(u, v) = d(v, u)$ が成立する．

G における 2 頂点間の距離の最大値を G の直径（diameter）と呼び，$diam(G)$ で表す．頂点 v から最も遠い頂点までの距離，すなわち $\max_{u \in V} d(v, u)$ を v の離心数（eccentricity）と呼び，$e(v)$ で表す．$e(v)$ の最小値，すなわち $\min_{v \in V} e(v)$ を G の半径（radius）と呼び，$rad(G)$ で表す．半径と直径の間には $rad(G) \leq diam(G) \leq 2rad(G)$ の関係がある．

また，$e(v)$ が最小となる頂点 v を G の中心点（central vertex），中心点の集合を G の中心（center）と呼ぶ．

3-1-11 代表的なグラフとその記法

（1）空グラフ

$|V| = n$ かつ $E = \emptyset$，すなわち辺集合が空である位数 n のグラフを空グラフ（null graph）と呼び，N_n と表す．

（2）完全グラフ

すべての異なる 2 頂点が隣接している位数 n のグラフを完全グラフ（complete graph）と呼び，K_n と表す．K_n はサイズ $|E| = n(n - 1)/2$ のグラフである．

(3) 閉路グラフ

n 頂点の道と同型なグラフを P_n, n 頂点の閉路と同型なグラフを C_n で表す．C_{n-1} に 1 頂点 v を加え，v と C_{n-1} の各頂点を辺で結んでできるグラフを位数 n の車輪（wheel）と呼び，W_n で表す．

(4) 正則グラフ

すべての頂点の次数が等しいグラフを正則グラフ（regular graph）と呼ぶ．特に次数が r であるグラフを r-正則グラフと呼ぶ．

(5) 2 部グラフ

$G = (V, E)$ の頂点集合 V を，すべての辺が X の頂点と Y の頂点を結ぶような二つの頂点集合 X と Y へ分割できるとき, G を 2 部グラフ（bipartite graph）と呼ぶ．このとき，X 及び Y は部集合（partite set）と呼ばれる．また，(X, Y) を V の 2 部分割（bipartition）と呼ぶ．

2 部グラフ $G = (V, E)$ の部集合を X 及び Y とする．X の各頂点が Y の各頂点に隣接するとき，G を完全 2 部グラフ（complete bipartite graph）と呼ぶ．$|X| = m$, $|Y| = n$ である完全 2 部グラフを $K_{m,n}$ と表記する．定義より，$K_{m,n}$ のサイズは mn である．

2 部グラフを一般化し，k-部グラフを定義することができる．すなわち，$G = (V, E)$ に対し，V の分割 $\{V_1, V_2, \ldots V_k\}$ で, 各辺の端点が異なる V_i, V_j に属するものが存在するとき，G を k-部グラフ（k-partite graph）と呼ぶ.

(6) 補グラフ

グラフ $G = (V, E)$ に対し，頂点集合を V とし，G において 2 頂点 u, v が隣接しないときかつそのときに限り u, v が隣接するグラフを G の補グラフ（complement）と呼び，$\overline{G}$ で表す．非連結グラフの補グラフは連結である．

$G \cong \overline{G}$，すなわち自分自身と同型なグラフを自己補対（self-complementary）と呼ぶ．定義より，G が自己補対であれば，位数は $4k$ あるいは $4k + 1$ のいずれかである（k は整数）．

(7) 線グラフ

$G = (V, E)$ に対し，以下のように定義されるグラフ $L(G)$ を線グラフ（line graph）と呼ぶ: $L(G)$ の頂点集合と E の間に全単射 ϕ が存在し, かつ G において辺 $e, f \in E$ が端点を共有するときかつそのときに限り $L(G)$ の 2 頂点 $\phi(e)$ と $\phi(f)$ が隣接する．

3-1-12 グラフの表現

(1) 隣接リスト表現

グラフ $G = (V, E)$ の各頂点 $v \in V$ ごとにその近傍 $N(v)$ の要素を並べたものを G の隣接リスト（adjacency list）と呼ぶ．例えば，単純グラフ $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_3v_4\}$ の隣接リストは, $v_1 : v_2, v_3/v_2 : v_1, v_3/v_3 : v_1, v_2, v_4/v_4 : v_3$ となる．

(2) 行列表現

$G = (V, E)$ を $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ からなる単純グラフとする．

隣接行列（adjacency matrix）は，G を以下で定める $|V| \times |V|$ 行列で表現する．

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \{v_i, v_j\} \in E \text{ のとき} \\ 0 & \{v_i, v_j\} \notin E \text{ のとき} \end{cases}$$

G が多重辺を区別しない多重グラフの場合，a_{ij} を v_i と v_j を結ぶ辺の数とすれば，隣接行列で表現することができる．

なお，目的によっては，$\{v_i, v_j\} \in E$ あるいは $(v_i, v_j) \in A$ のとき，$a_{ij} = \infty$ と定義されることもある．

接続行列（incidence matrix）は，自己閉路をもたない $G = (V, E)$ を以下で定める $|V| \times |E|$ 行列で表現する．

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \in V \text{ が } e_j \in E \text{ の端点のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

頂点 v_i に対して，自己閉路 e_j が存在する場合，目的に応じて，$a_{ij} = 0$ あるいは $a_{ij} = 2$ などと定義することがある．

■12 群 - 2 編 - 3 章

3-2 木

（執筆者：高橋俊彦）［2011 年 7 月 受領］

3-2-1 木の定義

閉路を含まないグラフを森（forest），連結な森を木（tree）と呼ぶ．位数 n のグラフ T に対する以下の命題は同値である:

(i) T は木である，すなわち T は閉路をもたない連結グラフである．

(ii) T は閉路をもたないサイズ $n-1$ のグラフである．

(iii) T は連結なサイズ $n-1$ のグラフである．

(iv) T は連結であり，かつ T のすべての辺は橋である．

(v) T の任意の 2 頂点を結ぶ道はちょうど一つ存在する．

(vi) T は閉路をもたないが，任意の非隣接な 2 頂点を辺で結んで得られるグラフはちょうど一つの閉路をもつ．

定義より，連結成分数 k の森は k 個の木からなり，そのサイズは $n-k$ である．

3-2-2 全域木と基本閉路，基本カットセット

連結グラフ $G=(V,E)$ は木である全域部分グラフ $T=(V,E'), E'\subseteq E$ をもつ．これを特に G の全域木（spanning tree）と呼ぶ．簡単のため,T の辺集合も T で表記する．また, $\overline{T}=E-T$ を補木（cotree）と呼ぶ．T に含まれる E の辺を木辺（tree edge），含まれない辺を補木辺（cotree edge）と呼ぶ．

前項の木の性質 (vi) より，各補木辺 e に対して，$T\cup\{e\}$ はちょうど一つの閉路をもつ．この閉路を T に対する e の基本閉路（fundamental cycle）と呼ぶ．T に対する $|\overline{T}|$ 個の基本閉路からなる集合を基本閉路系（fundamental system of cycles）と呼び $\mathcal{C}(T)$ と表す．

同様に，前項の木の性質 (iv) より，各木辺 e に対して，$T-e$ は二つの連結成分 T_1, T_2 よりなる．このとき，T_1 の頂点と T_2 の頂点を結ぶすべての補木辺と e よりなる辺集合は G のカットセットとなる．このカットセットを T に対する e の基本カットセット（fundamental cutset）と呼ぶ．T に対する $|T|$ 個の基本カットセットからなる集合を基本カットセット系（fundamental system of cutsets）と呼び $\mathcal{D}(T)$ と表す．

$\mathcal{E}(G)=2^E$，すなわち G の辺集合のべき集合とする．また $F_2=\{0,1\}$ を 2 元体とする．$\mathcal{E}(G)$ 上の加法と F_2 と $\mathcal{E}(G)$ のスカラー積を以下のように定義する．

(i) $X,Y\in\mathcal{E}(G)$ に対し，加法を $X\oplus Y$（対称差）とする．

(ii) $c\in F_2, X\in\mathcal{E}(G)$ に対し，$c=0$ のとき $cX=\emptyset$, $c=1$ のとき $cX=X$ とする．

このとき，$\mathcal{E}(G)$ はベクトル空間となり，以下が成り立つ．

定理 G のどの二つも辺を共有しない閉路の和集合はベクトル空間 $\mathcal{E}(G)$ の部分空間となる．また，T に対する基本閉路系 $\mathcal{C}(T)$ はその基底であり，部分空間の次元は $|\overline{T}|=|E|-|V|+1$ である．

定理 G のどの二つも辺を共有しないカットセットの和集合はベクトル空間 $\mathcal{E}(G)$ の部分空間となる．また，T に対する基本カットセット系 $\mathcal{D}(T)$ はその基底であり，部分空間の次元は $|T|=|V|-1$ である．

■12 群 - 2 編 - 3 章

3-3 マッチングと辺彩色

(執筆者：高橋俊彦)[2011 年 7 月 受領]

3-3-1 マッチング

(1) 一般のグラフのマッチング

グラフ $G = (V, E)$ の辺集合 $M \subseteq E$ は，どの 2 辺も端点を共有しないとき，マッチング(matching) と呼ばれる．サイズが最大のマッチングを最大マッチング (maximum matching) と呼ぶ．頂点 v はマッチングに属する辺の端点となっているとき，マッチされている (matched) あるいは飽和されている (saturated) と呼ばれる．

M をグラフ $G = (V, E)$ のマッチングとする．このとき，M の辺と $E - M$ の辺が交互に現れる道を交互道 (alternating path) という．交互道は始点と終点がともにマッチされていない (非飽和である) とき，増大道 (augmenting path) と呼ばれる．

定理 (Berge, 1957) グラフ G のマッチング M が最大であるための必要十分条件は，M に対する増大道が存在しないことである．

与えられたマッチング M に対して，多項式時間で増大道を見つける手法が知られている (Edmonds, 1965) 〔本編 4 章 4-6-3 参照〕．したがって，最大マッチングは多項式時間で求めることができる．

V の頂点がすべてマッチされているとき，M を完全マッチング (complete matching) と呼ぶ．

定理 (Tutte, 1947) $G = (V, E)$ に完全マッチングが存在するための必要十分条件は，すべての $S \subseteq V$ に対して，$q(G - S) \leq |S|$ であることである．ただし，$q(G)$ は G の位数が奇数である連結成分の数とする．

(2) 2 部グラフのマッチング

E の各辺の端点のうち少なくとも一つが $S \subseteq V$ に属するとき，S を G の点被覆 (vertex cover) という．また，最小点被覆のサイズを被覆数と呼び，$\beta(G)$ で表す．

定理 (König, 1931) 2 部グラフ G の最大マッチングのサイズは，$\beta(G)$ に等しい．

定理 (Hall, 1935) $G = (V, E)$ を 2 部グラフ，(X, Y) を V の 2 部分割とする．X をすべてマッチするようなマッチングが存在するための必要十分条件は任意の $S \subseteq X$ に対し，$|N(S)| \geq |S|$ であることである．

2 部グラフの最大マッチングを求めるには最大フローアルゴリズムを用いるのが効率的である〔本編 4 章 4-6-2 参照〕．

3-3-2 辺彩色

グラフ $G = (V, E)$ に対し，写像 $c : E \to \{1, 2, \ldots, k\}$ は，端点を共有する任意の 2 辺 e, f に対し $c(e) \neq c(f)$ を満たすとき，k-辺彩色 (k-edge coloring) と呼ばれる．また，このとき G は k-辺彩色可能 (k-colorable) であるという．G に対する k-辺彩色が存在するような k の最小値を辺彩色数 (chromatic index) と呼び $\chi'(G)$ で表す．グラフ G に対して，自明に $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ が成り立つ．

定理 (König, 1916) 任意の 2 部グラフ G に対し，$\chi'(G) = \Delta(G)$.

定理（Vizing, 1964）任意のグラフ G に対し，$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

定理（Vizing, 1964）任意の多重グラフ G に対し，$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$．ただし，$\mu(G)$ は G において同一の頂点対を結ぶ辺の本数の最大値である．

■12 群 - 2 編 - 3 章

3-4 点彩色

（執筆者：高橋俊彦）［2011 年 7 月 受領］

3-4-1 点彩色

グラフ $G = (V, E)$ に対し，写像 $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ は，任意の隣接する 2 頂点 u, v に対し $c(u) \neq c(v)$ を満たすとき，k-彩色（k-coloring）と呼ばれる．また，このとき G は k-彩色可能（k-colorable）であるという．G に対する k-彩色が存在するような k の最小値を彩色数（chromatic number）と呼び $\chi(G)$ で表す．

定理グラフ G は $(\Delta(G) + 1)$-彩色可能である．

定理（Brooks, 1941）G を完全グラフでも奇閉路でもない連結グラフとする．このとき，$\chi(G) \leq \Delta(G)$ である．

しかしながら，与えられたグラフ G と自然数 k に対して，$\chi(G) = k$ であるか否かを判定する問題は NP 完全である．

点彩色に関して，以下の未解決問題がある．

予想（Hadwiger, 1943）$k \geq 0$ に対し，K_{k+1} が G のマイナーでなければ，G は k-彩色可能である．

平面グラフ（後述）に対しては以下の結果が知られている．

5 色定理（Heawood, 1890）任意の平面的グラフは 5-彩色可能である．

4 色定理（Appel-Haken, 1976）任意の平面的グラフは 4-彩色可能である．

4 色定理は 5 色定理を含むが，Appel と Haken の証明は不可避集合と呼ぶ膨大なグラフのクラスの計算機による検証が必要であった．

3-4-2 独立集合

$G = (V, E)$ に対し，$S \subseteq V$ に属するどの 2 頂点も互いに隣接しないとき，S を G の独立集合（independent set）あるいは安定集合（stable set）という．

定理 $S \subseteq V$ が $G = (V, E)$ の独立集合であるための必要十分条件は，$V - S$ が G の点被覆であることである．

$G = (V, E)$ の最大独立集合のサイズを独立数（independence number）あるいは安定数（stability number）と呼び，$\alpha(G)$ と表す．定理の系として，$\alpha(G) + \beta(G) = |V|$ が得られる．

与えられたグラフ G と自然数 k に対して，$\alpha(G) = k$ であるか否かを判定する問題及び $\beta(G) = k$ であるか否かを判定する問題はいずれも NP 完全である．

3-4-3 クリークとクリーク被覆

頂点集合 $Q \subseteq V$ の誘導部分グラフ $G[Q]$ が完全グラフとなるとき，Q 及び $G[Q]$ をクリーク（clique）と呼ぶ．G に含まれる最大のクリークの頂点数を G のクリーク数（clique number）と呼び，$\omega(G)$ で表す．頂点集合 V のクリークの集合 $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_k\}$ への分割を G のクリーク被覆（clique cover）と呼ぶ．クリーク被覆に必要なクリークの数，すなわち k の最小値を G のクリーク被覆数（clique cover number）と呼び，$\theta(G)$ で表す．

与えられたグラフ G と自然数 k に対して，$\omega(G) = k$ であるか否かを判定する問題及び

$\theta(G) = k$ であるか否かを判定する問題はいずれも NP 完全である．

3-4-4 理想グラフ

独立数（安定数）$\alpha(G)$，クリーク被覆数 $\theta(G)$，クリーク数 $\omega(G)$，彩色数 $\chi(G)$ の間には自明に以下の関係がある．

定理 $\alpha(G) \leq \theta(G), \omega(G) \leq \chi(G)$.

定理 $\omega(G) = \alpha(\overline{G}), \chi(G) = \theta(\overline{G})$.

グラフ G のすべての誘導部分グラフ H に対し，$\omega(H) = \chi(H)$ であるとき，G を理想グラフ（perfect graph）と呼ぶ.

歴史的には，上の定義で与えられる理想グラフを χ-理想グラフ（χ-perfect graph）, G のすべての誘導部分グラフ H に対し，$\alpha(H) = \theta(H)$ であるグラフを α- 理想グラフ（α-perfect graph）と呼んでいた．Berge はこれら二つのクラスが同じであることを予想し，Lovász が証明を与えた．

弱理想グラフ定理（Lovász, 1972）G が理想グラフであるための必要十分条件は G のすべての誘導部分グラフ H に対して，$|V(H)| \leq \alpha(H)\omega(H)$．が成り立つことである．

系: G が理想グラフであるための必要十分条件は $\overline{G}$ が理想グラフであることである．

同様に Berge によって予想され，近年証明された禁止部分グラフによる特徴づけが次の定理である．

強理想グラフ定理（Chudnovsky-Robertson-Seymour-Thomas, 2002）G が理想グラフであるための必要十分条件は $k \geq 2$ に対し，G が C_{2k+1} あるいは $\overline{C_{2k+1}}$ を誘導部分グラフとして含まないことである．

理想グラフに対しては $\omega, \chi, \alpha, \theta$ を多項式時間で求めることができる．また，理想グラフの様々な部分クラスに対して，それぞれに特化したより効率的アルゴリズムが発表されている．

■12 群 - 2 編 - 3 章

3-5 平面的グラフ

(執筆者：高橋俊彦)［2011 年 7 月 受領］

3-5-1 平面的グラフ

平面上の点の有限集合 V と V の異なる 2 点を結ぶ曲線の集合 E からなる平面図形を平面グラフ（plane graph）$G = (V, E)$ と呼ぶ．ただし，各曲線はそれが結ぶ 2 点以外の V の点を通らず，また互いに交わらないものとする．V の要素である点を頂点，E の要素である曲線を辺と呼ぶ．

（抽象）グラフ $G = (V, E)$ が平面グラフ $\tilde{G}$ に同型であるとき，その同型写像を G の平面埋め込み（planar embedding），$\tilde{G}$ を G の平面描画（planar drawing）と呼ぶ．

平面埋め込みをもつグラフは平面的（planar）であると呼ばれる．

グラフが平面的であるための禁止部分グラフによる特徴づけが知られている．

定理（Kuratowski, 1930）グラフ G が平面的であるための必要十分条件は G が K_5 あるいは $K_{3,3}$ に位相同型な部分グラフを含まないことである．

定理（Wagner, 1937）グラフ G が平面的であるための必要十分条件は G が K_5 あるいは $K_{3,3}$ を位相的マイナーとして含まないことである．

定理（Wagner, 1937）グラフ G が平面的であるための必要十分条件は G が K_5 あるいは $K_{3,3}$ をマイナーとして含まないことである．

与えられたグラフが平面的であるか否かを判定するには上の特徴づけに基づかない線形時間アルゴリズムが存在する（Hopcroft-Tarjan, 1974）．

3-5-2 Eular の公式

平面グラフ G はそれが埋め込まれている平面 $\mathbb{R}^2$ を領域（region）に分割する．$\mathbb{R}^2 - G$ の領域は面（face）と呼ばれることもある．有界な領域を内領域（inner region），有界でない（唯一の）領域を外領域（outer region）と呼ぶ．

定理（Eular, 1750）G を連結な平面グラフとする．G の位数，サイズ，領域数をそれぞれ n, m, f とすると，$n - m + f = 2$ が成り立つ．

Eular の定理から様々な結果が得られる．

系 $G = (V, E)$ を位数 n，サイズ m の連結な平面グラフとする．このとき，$m \leq 3n - 6$ が成り立つ．

系 連結な平面グラフは次数 5 以下の頂点をもつ．

3-5-3 双対グラフ

本項では多重グラフを考える．

平面グラフ G に対し，その（幾何学的）双対グラフ（dual graph）G^* が以下のように定義される：G の各領域 f の内部から点 v を選んで G^* の点とする．G の各辺 e を境界とする 2 領域に対応する点対を e に 1 度だけ交差する曲線で結び，G^* の辺とする．ただし，e が 1 領域の境界である場合，e に対応する G^* の辺は領域に対応する点に接続する自己閉路となる．

G^* のつくり方より，連結グラフ G とその双対グラフ G^* の位数，サイズ，領域数の間に

は以下の関係がある：

定理 連結な平面グラフ G の位数を n，サイズを m，領域数を r, 双対グラフ G^* の位数を n^*，サイズを m^*，領域数を r^* とする．このとき，$n^* = r^*, m^* = m, r^* = r$ が成り立つ．

定理 G が連結な平面グラフであるとき，$G \cong G^{**}$.

定理 G を平面的グラフ，G^* をその幾何学的双対グラフとする．このとき，G の辺集合 $C \subseteq E$ が G において閉路であるための必要十分条件は, C に対応する G^* の辺集合 C^* が G^* においてカットセットとなることである．

上の定理から, G が平面描画を経由せずに双対グラフを定義することができる．グラフ G 及び G^* に対し，以下の性質を満たす全単射 ϕ が存在するとき，G^* を G の抽象的双対（abstract dual）と呼ぶ: G の辺集合 $C \subseteq E$ が G において閉路であるとき，かつそのときに限り辺集合 $\phi(C)$ が G^* においてカットセットである． ただし，任意のグラフが抽象的双対をもつわけではない.

定理（Whitney, 1933）グラフ G が平面的であるための必要十分条件は，G が抽象的双対をもつことである.

定理 G^* が G の抽象的双対であるならば，G は G^* の抽象的双対である.

■参考文献

1) R.J. Wilson, “Introduction to Graph Theory（5th Edition）,” Prentice Hall,（1st Edition 1972; 5th Edition 2010）; 西関隆夫, 西関裕子（翻訳）, “グラフ理論入門, 第 4 版,” 近代科学社, 2001.
2) C. Berge, “Graphs and Hypergraphs,” North-Holland Mathematical Library, vol.6, North-Holland（Revised Edition 1973）; 伊理正夫, 岩坪秀一, 佐藤創, 伊理由美, 小林欣吾, 星守（翻訳）, “グラフの理論 I-III,” サイエンスライブラリ数学, サイエンス社, 1976.
3) J.A. Bondy and U.S.R. Murty, “Graph Theory with Applications,” Macmillan（Revised Edition 1977）; 立花俊一, 田沢新成, 奈良知恵（翻訳）, “グラフ理論への入門,” 共立出版, 1991.
4) 伊理正夫, 白川 功, 梶谷洋司, 篠田庄司ほか, “演習グラフ理論—基礎と応用,” コロナ社, 1983.
5) 恵羅博, 土屋守正, “増補改訂版グラフ理論,” シリーズ/情報科学の数学, 産業図書, 1996.
6) R. Diestel, “Graph Theory（4th Edition）,” Springer,（1st Edition 1997; 4the Edition 2010）; 根上生也, 太田克弘（翻訳）, “グラフ理論（2nd Edition）,” シュプリンガーフェアラーク東京, 2000.
7) 根上生也, “位相幾何学的グラフ理論入門,” 横浜図書, 2001.
8) J.L. Gross and J. Yellen (ed.), “Handbook of Graph Theory,” CRC Press, 2004.
9) 落合豊行, “グラフ理論入門 — 平面グラフへの応用,” 日本評論社, 2004.
10) 浅野孝夫, “離散数学–グラフ・束・デザイン・離散確率–,” ライブラリ・情報学コア・テキスト 2, サイエンス社, 2010.