■5 群（通信・放送）－ 1 編（待ち行列理論とシミュレーション）

5 章 待ち行列ネットワークモデル

（執筆者：笠原正治）［2009 年 10 月 受領］

■概要■

計算機システムや通信ネットワーク，生産システムは複数の資源がネットワークを構成して処理が行われる．このようなシステムの性能を評価するためには，待ち行列施設が複数組み合わされたネットワークモデルを考える必要がある．待ち行列ネットワークは待ち行列ノードが複数組み合わされたネットワークモデルであり，1950 年代半ばにジャクソンによって研究が開始された．以降，解析的に扱い易い積形式解と呼ばれる解構造を中心に，計算量を大幅に削減する数値計算アルゴリズムや近似解析法など幅広い方面で研究が展開されている．

本章では待ち行列ネットワークの基本モデル，積形式解を持つための条件，および計算アルゴリズムについて焦点を絞り，概要を説明する．

【本章の構成】

本章の構成は以下の通りである．まず基本的な待ち行列ネットワークモデルとしてジャクソンネットワーク，Gordon-Newell ネットワーク，BCMP ネットワークを紹介し，これらが積形式解と呼ばれる解構造を持つことを示す．次に待ち行列ネットワークが積形式解を持つための性質として準可逆性と対称型サービス規範について述べる．最後に待ち行列ネットワークの計算アルゴリズムとして，たたみ込み法と平均値解析法について紹介する．

■5 群 - 1 編 - 5 章

5-1 待ち行列ネットワークモデル

（執筆者：笠原正治）[2009 年 10 月 受領]

5-1-1 待ち行列ネットワーク

待ち行列のシステムでは，サービス施設はサーバと待合室から構成される．待ち行列ネットワークは，複数のサービス施設（以下ノードと呼ぶ）が結合して客をサービスするシステムである．待ち行列ネットワークは大別して開放型待ち行列ネットワーク（open queueing network）と閉鎖型待ち行列ネットワーク（closed queueing network）に分類される．開放型待ち行列ネットワークでは，客はネットワークの外部から到着し，複数のノードでサービスを受けた後，ネットワークから離脱する．一方，閉鎖型待ち行列ネットワークでは，一定数の客がネットワーク内を移動し続け，外部からの到着・外部への離脱は発生しない．

5-1-2 ジャクソンネットワーク

待ち行列ネットワークの研究は 1950 年代中頃にジャクソン（J.M. Jackson）によって開始された[1)]．ジャクソンは次の仮定をみたす開放型待ち行列ネットワークを考えた．

仮定（Jackson）

1. 網内でサービスされる客のクラスは 1 種類である．
2. 網内に存在する客数は無制限である．
3. 網内には N 個のノードが存在し，この他に外部を表すノード 0 がある．各ノードには外部から率 λ_{0i} $(1 \le i \le N)$ のポアソン過程に従って客が到着し，任意のノードから網外への客の離脱が可能である．
4. 客のサービス時間はすべてのノードにおいて指数分布に従う．
5. 客のサービス規範は到着順サービス（FCFS）である．
6. 第 i ノード $(1 \le i \le N)$ には，サービス率 μ_i を持つ m_i (≥ 1) 人のサーバが存在する．外部からノード i への到着率とサービス率 μ_i は第 i ノードに存在する客数 n_i に依存してもよい．
7. ノード i でサービスを受けた客は確率 p_{ij} $(p_{ij} \ge 0, \sum_{j=0}^{N} p_{ij} = 1)$ でノード j に移動する．ここで p_{i0} は客がノード i から網外に離脱する確率を表す．

上記の仮定を満足する待ち行列網を，ジャクソンネットワークと呼ぶ．

ノード i に網外・網内から到着する客の全到着率を λ_i とする．平衡状態では，あるノードへの単位時間当たりの客の到着数はそのノードからの単位時間当たりの離脱量に等しいことに注意すると，トラヒック方程式と呼ばれる次式を得る．

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j p_{ji}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

ここで時刻 t におけるノード i の系内客数を表す確率変数を $N_i(t)$，システムの状態を $\boldsymbol{N}(t) = (N_1(t), N_2(t), \ldots, N_N(t))$ とし，ノード i の系内客数の実現値を n_i，それのベクトル表現を $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_N)$ とする．定常状態におけるシステムの状態確率を $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{n}) = \lim_{t\to\infty} \Pr\{\boldsymbol{N}(t) = \boldsymbol{n}\}$ で定義し，$\rho_I = \lambda_i/(m_i\mu_i)$ とする．すべての i $(1 \le i \le N)$ に対して $\rho_i < 1$ が成立するとき，定常状態におけるシステムの状態確率 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{n})$ は積形式解（product form solution）と呼ばれる次の形で与えられることが知られている．

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{n}) = \pi_1(n_1)\pi_2(n_2)\cdots\pi_N(n_N) \tag{5・1}$$

ここで $\pi_i(n_i)$ はノード i の周辺分布であり，次式で与えられる．

$$\pi_i(n_i) = \begin{cases} \pi_i(0)\dfrac{(m_i\rho_i)^{n_i}}{n_i!}, & n_i \le m_i \\ \pi_i(0)\dfrac{m_i^{m_i}\rho_i^{k_i}}{m_i!}, & n_i > m_i \end{cases} \tag{5・2}$$

$$\pi_i(0) = \left(\sum_{n_i=0}^{m_i-1} \frac{(m_i\rho_i)^{n_i}}{n_i!} + \frac{(m_i\rho_i)^{m_i}}{m_i!(1-\rho_i)}\right)^{-1} \tag{5・3}$$

式 (5・1) の証明は，系が満足する大域平衡方程式（global-balance equations）を導出し，式 (5・1) がそれを満足することを示すことで行われる．

式 (5・1) より，ジャクソン網では各ノードは他のノードと独立に振る舞っているようにみなせることがわかる．また，式 (5・2)，式 (5・3) で与えられるノード i の周辺分布 $\pi_i(n_i)$ は，到着率 λ_i とサービス率 μ_i を持つ M/M/m_i 待ち行列の系内客数分布と一致しているのは注目に値する．ただし，ノード i への客の到着過程は一般に率 λ_i のポアソン過程にならないことに注意する．

5-1-3 Gordon-Newell ネットワーク

Gordon と Newell は，一定数の客がネットワーク内を移動し続ける次の閉鎖型待ち行列網を検討した[2)]．

仮定（Gordon-Newell）

1. 網内でサービスされる客のクラスは 1 種類である．
2. 網内には N 個のノードが存在する．
3. 網内の客の総数 K は有限で，ノード i の客数を n_i とすると，$K = \sum_{i=1}^{N} n_i$ をみたす．
4. 客のサービス時間はすべてのノードにおいて指数分布に従う．
5. 第 i ノード $(1 \le i \le N)$ には，サービス率 μ_i を持つ m_i (≥ 1) 人のサーバが存在する．
6. ノード i でサービスを受けた客は確率 p_{ij} $(1 \le i, j \le N,\ p_{ij} \ge 0,\ \sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1)$ でノード j に移動する．

ジャクソン網と異なり, 客の外部からの到着, 及び外部への離脱がないことから, $\lambda_{0i} = \lambda_{i0} = 0$ となることに注意する．これより，閉鎖型待ち行列網でのトラヒック方程式は次式で与えられる．

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j p_{ji}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N \tag{5・4}$$

方程式 (5・4) の解は一意に決定できないことに注意する．以下では式 (5・4) をみたす非零の解を e_i $(1 \le i \le N)$ とする．

このような閉鎖型待ち行列網についても以下の積形式解が成立することが知られている．

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{G(K)} \prod_{i=1}^{N} f_i(n_i) \tag{5・5}$$

ここで $G(K)$ は正規化定数であり，次式で与えられる．

$$G(K) = \sum_{n_1+n_2+\cdot+n_N=K} \prod_{i=1}^{N} f_i(n_i) \tag{5・6}$$

また，$f_i(n_i)$ はノード i の状態確率に相当するものであり，次式で与えられる．

$$f_i(n_i) = \frac{1}{\alpha_i(n_i)} \left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^{n_i}$$

$$\alpha_i(n_i) = \begin{cases} n_i!, & n_i \le m_i \\ m_i! m_i^{n_i - m_i}, & n_i > m_i \\ 1, & m_i = 1 \end{cases}$$

■参考文献

1) J.M. Jackson, “Networks of Waiting Lines,” Operations Research, vol.5, no.4, pp.518-521, 1957.

2) W. Gordon and G. Newell, “Closed Queuing Systems with Exponential Servers,” Operations Research, vol.15, no.2, pp.254-265, 1967.

■5 群 - 1 編 - 5 章

5-2 BCMP ネットワーク

（執筆者：笠原正治）[2009 年 10 月 受領]

ジャクソン網や Gordon-Newell 網の結果は Baskett, Chandy, Muntz, Palacios らによって複数のサービスクラス客や一般的なサービス時間分布が導入されたより広い範囲の待ち行列ネットワークについて拡張された[1)]．ここで取り扱われているネットワークモデルは，4 人の著者名の頭文字を取って BCMP ネットワークと呼ばれている．BCMP ネットワークは開放型，閉鎖型，いずれのネットワークも表現することができ，かつ客のクラスがノードを移動するごとに変化することを許している．BCMP ネットワークでは，次の条件が仮定される．

1. ネットワーク内部には N 個のノードが存在する．

2. 客のタイプは C 個のクラスに分類され，客はいずれかのクラスに属する．

3. ネットワーク内の客の位置は，ノード番号 n $(n = 1, 2, \ldots, N)$ とクラス番号 c $(c = 1, 2, \ldots, C)$ を用いて (n, c) で表される．外部ノードは 0 で表す．このとき，客はマルコフ連鎖 $\boldsymbol{Q} = (q_{(n,c),(n',c')})$ に従ってノードを移動する．具体的には，ノード n でクラス c の客はノード n でのサービス終了後，ネットワークの状態とは独立に確率 $q_{(n,c),(n',c')}$ でノード n' のクラス c' 客になる．

4. 外部ノード 0 からネットワークに到着する客全体の到着過程は，率 λ のポアソン過程に従って到着する．λ はネットワーク内に存在する客数に依存してもよい．外部から到着する客は確率 $q_{0,(n,c)}$ でノード i のクラス c 客となる．なお，すべてのクラスに対して $q_{0,(n,c)} > 0$, $q_{(n,c),0} > 0$ ならば開放型，$q_{0,(n,c)} = 0$, $q_{(n,c),0} = 0$ ならば閉鎖型となる．

5. 各ノードにおけるサービス規範は FCFS，プロセッサシェアリング（Processor Sharing: PS），無限サーバ（Infinite Server: IS），後着順割込継続型（LCFS-PR）のいずれかに従う．

6. 客のサービス時間は，FCFS のときは客のクラスとは独立な率を持つ指数分布に従う．このとき，サービス率はノード内客数に依存してもよい．FCFS 以外のサービス規範のとき，サービス時間は任意の分布が許され，客のクラスに依存してもよい．サービス率については同一クラスの客数に依存してもよいが，他クラスの客数とは独立でなければならない．

客の経路を支配する確率行列 $\boldsymbol{Q}$ が互いに背反な状態集合 E_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ 上の独立な m 個の部分マルコフ連鎖 $\boldsymbol{Q}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ に分解でき，それぞれの部分連鎖は定常状態分布をもつものとする．このとき，$\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{Q}_j$ を対角要素にもつブロック対角行列となる．例えばクラス 1 とクラス 2 は E_1 に貢献し，クラス 3 は E_2 に貢献し，クラス i $(i = 4, 5, \ldots, C)$ は E_3 に貢献するような場合は，$m = 3$ 個の部分連鎖に分解できることに相当する．

K_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ を部分連鎖 E_j に属するクラスの系内客数とし，$K = \sum_i K_i$ とする．文献 1) では外部からの客の到着過程として次の二つの場合が考えられている．

1. ネットワーク内に滞在する客の総数が K のとき，率 $\lambda(K)$ のポアソン過程に従って新規客が到着する.（第 1 種到着）

2. ネットワーク内に滞在するクラス群 i の客数が K_i のとき，クラス群 i の新規客は率 $\lambda(K_i)$ のポアソン過程に従って到着する.（第 2 種到着）

また，トラヒック方程式として次の連立方程式が得られる.

$$e_{ir} = \sum_{c=1}^{C} \left(\sum_{n=1}^{N} e_{nc} q_{(n,c),(i,r)} + q_{0,(i,r)} \right), \qquad 1 \le i \le N,\ 1 \le r \le C \tag{5・7}$$

e_{ir} はクラス r の客がノード i を訪問する相対訪問回数と呼ばれる.

文献 1) では積型式解の陽表現形を得るため，サービス分布のラプラス・スティルチェス変換形（LST）$S^*(s)$ が以下のような有理形で与えられる Cox 分布を仮定している.

$$S^*(s) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} b_0 b_1 \cdots b_{j-1} a_j \prod_{i=1}^{j} \frac{\mu_i}{s + \mu_i}$$

ただし $a_j + b_j = 1\ (j = 0, 1, \ldots, n-1), a_n = 1$ である．Cox 分布は指数分布，アーラン分布，超指数分布を含む分布で，任意の分布関数を任意の精度で近似できることが知られている.

ノード i におけるクラス r 客のサービスステージ数を l_{ir}，その客の n 番目のステージにおける指数分布サービスの率を μ_{irn} とする．また，ノード i におけるクラス r 客が m 番目のサービスステージに到達する確率を A_{irm} とおく．ノード i のサービス時間が Cox 分布で与えられる場合，その LST $S^*_{ir}(s)$ は次式で与えられる.

$$S^*_{ir}(s) = a_0 + \sum_{m=1}^{l_{ir}} A_{irm} a_m \prod_{n=1}^{m} \frac{\mu_{irn}}{s + \mu_{irn}} \tag{5・8}$$

ただし，$A_{irm} = b_0 b_1 \cdots b_{m-1}$ である.

BCMP 網内のノードは仮定 5 と 6 に従うサービスを客に提供する．ノードは具体的には以下の四つのタイプに分類される.

タイプ 1： ノードは到着順サービスを行う単一サーバで構成される．ノード i の客数が n_i のとき，客のサービス時間は率 $\mu_i(n_i)$ の指数分布に従い，客のクラスには依存しない．ノード i の状態は $\boldsymbol{n}_i = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in_i})$ で表現される．ここで c_{ij} はノード i において先着順で j 番目に並んでいる客のクラスを表す.

タイプ 2： ノードはプロセッサシェアリングサービスを行う単一サーバで構成される．ノード i に n_i 人の客が存在するとき，各客は $1/n_i$ のサービス率で処理が行われる．客のサービス時間は Cox 分布に従い，クラスごとに異なってもよい．ノード i の状態は $\boldsymbol{n}_i = ((c_{i1}, s_{i1}), (c_{i2}, s_{i2}), \ldots, (c_{in_i}, s_{in_i}))$ で表され，s_{ij} は到着順で j 番目に並んでいる客のサービスステージ番号である．ノード i におけるクラス r 客のサービスステージ数を l_{ir}，m 番目のサービスステージにいるクラス r の客数を n_{irm} とすると，$n_i = \sum_{r=1}^{C} \sum_{m=1}^{l_{ir}} n_{irm}$ である.

タイプ 3： ノードのサーバ数は無限であり，客のサービス時間は Cox 分布に従う．サービス時間は客のクラスごとに異なってもよく，ノードの状態はタイプ 2 と同じ形で表現される．

タイプ 4： ノードは後着順・割り込み型サービスを行う単一サーバで構成される．客のサービスは新規客の到着で割り込まれ，サービスが再開されるときは中断されたところからサービスが再開される．客のサービス時間は Cox 分布に従う．サービス時間は客のクラスごとに異なってもよい．ノードの状態は $\boldsymbol{n}_i = ((c_{i1}, s_{i1}), (c_{i2}, s_{i2}), \ldots, (c_{in_i}, s_{in_i}))$ で表され，(c_{ij}, s_{ij}) は後着順で j 番目に並んでいる客のクラスとステージ番号を表す．

時刻 t におけるノード i の状態を表す確率変数を $\boldsymbol{N}_i(t)$ で表し，ネットワーク全体の状態を確率変数ベクトル $\boldsymbol{N}(t) = (\boldsymbol{N}_1(t), \boldsymbol{N}_2(t), \ldots, \boldsymbol{N}_N(t))$ で表すことにする．また，対応する実現値を $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \ldots, \boldsymbol{n}_N)$ とし，システムの定常状態確率を $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{n}) = \lim_{t\to\infty} \Pr\{\boldsymbol{N}(t) = \boldsymbol{n}\}$ で定義する．このとき，次の BCMP 定理が成り立つ．

BCMP の定理

BCMP 網の定常状態確率 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{n})$ は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{n}) = \kappa^{-1} d(K) \prod_{i=1}^{N} f_i(\boldsymbol{n}_i)$$

ただし κ は以下で与えられる正規化定数である．

$$\kappa = \sum_{\boldsymbol{n}} d(K) \prod_{i=1}^{N} f_i(\boldsymbol{n}_i)$$

$f_i(\boldsymbol{n}_i)$ はノードのタイプごとに依存した形で次のように与えられる．

$$f_i(\boldsymbol{n}_i) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{j=1}^{n_i} \frac{e_{ic_{ij}}}{\mu_i(n_i)} & \text{タイプ 1} \\ \displaystyle n_i! \prod_{r=1}^{C} \prod_{m=1}^{l_{ir}} \frac{(e_{ir} A_{irm} \mu_{irm}^{-1})^{n_{irm}}}{n_{irm}!} & \text{タイプ 2} \\ \displaystyle\prod_{r=1}^{C} \prod_{m=1}^{l_{ir}} \frac{(e_{ir} A_{irm} \mu_{irm}^{-1})^{n_{irm}}}{n_{irm}!} & \text{タイプ 3} \\ \displaystyle\prod_{j=1}^{n_i} \frac{e_{ic_{ij}} A_{ic_{ij}s_{ij}}}{\mu_{ic_{ij}s_{ij}}} & \text{タイプ 4} \end{cases}$$

$d(K)$ は到着関数と呼ばれ，閉鎖型待ち行列網の場合は $d(K) = 1$，開放型待ち行列網の場合は次式で与えられる．

$$d(K) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{n=0}^{K-1} \lambda(n) & \text{第 1 種到着} \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{m} \prod_{n=0}^{K_i-1} \lambda(n) & \text{第 2 種到着} \end{cases}$$

■参考文献

1) F. Baskett, K. Chandy, R. Muntz, and F. Palacios, “Open, Closed, and Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers,” J. ACM, vol.22, no.2, pp.248-260, 1975.

■5 群 - 1 編 - 5 章

5-3 待ち行列ネットワークと積形式解

（執筆者：笠原正治）［2009 年 10 月 受領］

ここまで Jackson 網，Gordon-Newell 網，BCMP 網では定常状態確率が積形式解を持つことを紹介してきた．ここでは一般的な定常マルコフ連鎖において積形式解が成立するための条件を紹介する[1, 2, 3, 4, 5]．

5-3-1 大域平衡方程式

今，状態空間 $\mathcal{S}$ を持つ定常マルコフ連鎖を考える．二つの状態 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathcal{S}$ に対し，$\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{x}'$ への推移率を $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$，状態が $\boldsymbol{x}$ である定常状態確率を $\pi(\boldsymbol{x})$ とおくと，$\pi(\boldsymbol{x})$ は次の大域平衡方程式（global balance equation）を満足する．

$$\pi(\boldsymbol{x}) \sum_{\boldsymbol{x}' \in \mathcal{S}} q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \sum_{\boldsymbol{x}' \in \mathcal{S}} \pi(\boldsymbol{x}') q(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}) \tag{5・9}$$

式 (5・9) の左辺は状態 $\boldsymbol{x}$ から出る推移率を，右辺は $\boldsymbol{x}$ に入る推移率を表し，式 (5・9) 自体はその両者が等しいことを意味している．式 (5・9) を満足する確率分布 $\{\pi(\boldsymbol{x})\}$ が存在するとき，$\{\pi(\boldsymbol{x})\}$ は一意に定まる．

5-3-2 局所平衡方程式

式 (5・9) は状態空間 $\mathcal{S}$ に対して成立する平衡方程式であるが，状態推移を制限した場合にも状態に入る推移率と出る推移率が等しくなるような方程式が得られる場合がある．具体例として，$A \subset \mathcal{S}$ である状態部分集合 A に対し，

$$\pi(\boldsymbol{x}) \sum_{\boldsymbol{x}' \in A} q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \sum_{\boldsymbol{x}' \in A} \pi(\boldsymbol{x}') q(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}) \tag{5・10}$$

という形の方程式が成立する場合がある．式 (5・10) を局所平衡方程式（local balance equation）または，部分平衡方程式（partial balance equation）と呼ぶ．局所平衡方程式に解が存在する場合，その解は大域平衡方程式 (5・9) の解にもなっている．

5-3-3 可逆性

状態空間 $\mathcal{S}$ を持つ定常マルコフ連鎖 $\boldsymbol{X}(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ に対し，時間を逆転させた過程 $\boldsymbol{X}(-t)$ を逆時間過程（reversed process）と呼ぶ．$\boldsymbol{X}(t)$ が既約かつエルゴード的なマルコフ連鎖ならば，逆時間過程 $\boldsymbol{X}(-t)$ もまた既約かつエルゴード的であり，共通の定常分布 $\pi(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} \in \mathcal{S})$ を持つ．$\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(-t)$ の推移率をそれぞれ $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'), q'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ とすると，次式が成立する．

$$\pi(\boldsymbol{x}) q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \pi(\boldsymbol{x}') q'(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathcal{S}$$

逆時間過程 $\boldsymbol{X}(-t)$ の有限次元同時分布が $\boldsymbol{X}(t)$ の有限次元同時分布と同一であるとき，$\boldsymbol{X}(t)$ は可逆であるという．$X(t)$ が可逆であるための必要十分条件は，

$$\pi(\boldsymbol{x}) q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \pi(\boldsymbol{x}') q(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathcal{S} \tag{5・11}$$

が成立することである．式 (5･11) は詳細平衡方程式（detailed balance equation）と呼ばれ，詳細平衡方程式を満足する解はまた大域平衡方程式を満足する．

5-3-4 準可逆性

待ち行列システムの状態が $\boldsymbol{X}(t)$ で表される場合を考える．$\boldsymbol{X}(t)$ が以下の性質を持つ定常マルコフ連鎖であるとき，その待ち行列は準可逆（quasi-reversible）であるという．

1. $\boldsymbol{X}(t)$ が時刻 t 以降に発生する客の到着時刻と独立である．

2. $\boldsymbol{X}(t)$ が時刻 t 以前に離脱した客の離脱時刻と独立である．

可逆性は一般的な定常マルコフ連鎖に対する性質であるのに対し，準可逆性は Kelly[1)]によって提案された待ち行列に特化した性質である．準可逆な待ち行列では，客の到着はポアソン過程を形成すること，及び客の離脱過程もポアソン過程を形成することが知られている．

準可逆性を持つ待ち行列システムの定常状態確率は，局所平衡方程式を満足することが証明できる．今, C クラスの客をサービスする準可逆な待ち行列システムを考える．時刻 t においてクラス c $(1 \le c \le C)$ 客の系内人数を $X_c(t)$，システムの状態を $\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_C(t))$ で定義する．また対応する実現値を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_C)$ とする．システムの定常状態確率を $\pi(\boldsymbol{x}) = \lim_{t\to\infty} \Pr\{\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{x}\}$ で定義し，状態 $\boldsymbol{x}$ から状態 $\boldsymbol{x}'$ への推移率を $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ で表す．

今，状態 $\boldsymbol{x}$ に対し，クラス c の客が 1 人だけ多く，かつ，その他の状態は $\boldsymbol{x}$ と同じである状態を集めてできる状態部分集合を $S(c, \boldsymbol{x})$ とする．このとき，準可逆性よりクラス c の客の到着過程はそのクラスのみに依存し，状態 $\boldsymbol{x}$ とは独立に

$$\lambda(c) = \sum_{\boldsymbol{x}' \in S(c,\boldsymbol{x})} q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \tag{5･12}$$

の到着率を持つポアソン過程となる．

ここで $\boldsymbol{X}(t)$ の逆時間過程 $\boldsymbol{X}(-t)$ を考える．$\boldsymbol{X}(t)$ の定常状態確率が $\pi(\boldsymbol{x})$ ならば，逆時間過程 $\boldsymbol{X}(-t)$ の推移率 $q'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ は

$$\pi(\boldsymbol{x}) q'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \pi(\boldsymbol{x}') q(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}) \tag{5･13}$$

を満足する．一方，準可逆性より，系内客数過程 $\boldsymbol{X}(t)$ におけるクラス c 客の離脱過程はポアソン過程を形成する．$\boldsymbol{X}(t)$ は平衡状態にあること，及びクラス c 客の到着は率 $\lambda(c)$ のポアソン過程であることから，過程 $\boldsymbol{X}(t)$ におけるクラス c 客の離脱率は $\lambda(c)$ となる．よって逆時間過程 $\boldsymbol{X}(-t)$ におけるクラス c 客の到着率もまた $\lambda(c)$ となり，逆時間過程の推移率 $q'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ を用いて次式で表される．

$$\lambda(c) = \sum_{\boldsymbol{x}' \in S(c,\boldsymbol{x})} q'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \tag{5･14}$$

式 (5･13) の両辺を状態 $\boldsymbol{x}' \in S(c, \boldsymbol{x})$ についてすべて足し合わせ，式 (5･12) と式 (5･14) を用いると次の局所平衡方程式を得る．

$$\pi(\boldsymbol{x}) \sum_{\boldsymbol{x}' \in S(c,\boldsymbol{x})} q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \sum_{\boldsymbol{x}' \in S(c,\boldsymbol{x})} \pi(\boldsymbol{x}') q(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x})$$

5-3-5 準可逆性と待ち行列ネットワーク

対象とする待ち行列ネットワークから一つのノードを切り出し，そのノードにポアソン過程で到着客を入力したとき，定常状態分布が存在すると仮定する．もしこのノードが準可逆な待ち行列ノードならば，このノードからの客の退去過程は退去直後の状態とは独立なポアソン過程となる．Kelly は文献 1) の中で，待ち行列ネットワークを構成するすべてのノードが準可逆であるとき，その待ち行列ネットワークが積形式解を持つこと，すなわち準可逆性が積形式解を持つための十分条件であることを示した．

文献 4, 5) では，ネットワークを構成するノードを（1）到着，（2）内部変化，（3）退去，という 3 種類の事象に伴う状態変化を持つ部品とみなした抽象的なモデル化を考え，準可逆性が積形式解を持つための十分条件であることを厳密に議論している．また，準可逆性が積形式解を持つための必要条件ではないこと，及び準可逆性が必要条件となる待ち行列ネットワークのノード条件が記されている．詳しくは，文献 4, 5) を参照されたい．

5-3-6 対称型サービス規範を持つ待ち行列

待ち行列ノードが準可逆性を持つサービス規範として，対称型サービス規範が知られている．対称型サービス規範を記述するため，待ち行列ノードで各客が占めるサービス施設の位置に番号 $1, 2, \ldots$ をつける．その待ち行列ノードの現在の客数が n 人のとき，サーバのサービス率は n に依存した μ_n で与えられるものと仮定する．

$\gamma_n(l)$ $(1 \leq l \leq n)$ をサービス施設の l 番目に位置する客に割り当てられるサーバ処理能力の割合とすると $\sum_{l=1}^{n} \gamma_n(l) = 1$ であり，l 番目の客のサービス率は $\gamma_n(l)\mu_n$ で与えられる．l 番目の客のサービスが完了してノードから離脱したとき，位置 $1, 2, \ldots, l-1$ の客の位置は変わらず，$l+1, l+2, \ldots, n$ の客の位置は $l, l+1, \ldots, n-1$ に移動する．

この待ち行列ノードの客数が n 人であるとき，新しい到着客は確率 $\delta_n(l)$ $(1 \leq l \leq n)$ でサービス施設の位置 l に入る．ここで $\sum_{l=1}^{n} \delta_n(l) = 1$ である．到着直前に位置 $1, 2, \ldots, l-1$ にいた客の位置は変わらず，$l, l+1, \ldots, n$ の客の位置は $l+1, l+2, \ldots, n+1$ に移動する．

上記の $\gamma_n(l)$ と $\delta_n(l)$ において，すべての n に対し，

$$\gamma_n(l) = \delta_n(l), \qquad l = 1, 2, \ldots, n \tag{5・15}$$

が成立するとき，その待ち行列は対称（symmetric）であるという．待ち行列が対称となるサービス規範の例を以下に示す．

1. **後着順割込継続型（LCFS-PR）**

$$\gamma_n(l) = \delta_n(l) = \begin{cases} 0, & l = 1, 2, \ldots, n-1 \\ 1, & l = n \end{cases}$$

サービス率 μ_n は系内客数に依存してもよい．

2. **無限サーバ（Infinite Server: IS）** 系内客数が n 人のときのサービス率を $\mu_n = n\mu$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とするとき，無限サーバのサービス割当率 $\gamma_n(l)$ は

$$\gamma_n(l) = \frac{1}{n}, \qquad\qquad l = 1, 2, \ldots, n$$

で与えられる．無限サーバ待ち行列では客の位置に関係なくサービスが行われるため，$\delta_n(l)$ は任意に決めることができる．それゆえ，$\delta_n(l) = \gamma_n(l)$ とおいても差し支えがない．

3. **プロセッサシェアリング（Processor Sharing: PS）** すべての $n \geq 1$ に対して一定のサービス率 $\mu_n = \mu$ でサービスを行う単一サーバの場合，プロセッサシェアリングのサービス割り当て率 $\gamma_n(l)$ は

$$\gamma_n(l) = \frac{1}{n}, \qquad\qquad l = 1, 2, \ldots, n$$

で与えられる．無限サーバ待ち行列と同様，客はサービス施設内の位置に関係なくサービスが行われるため，$\delta_n(l) = \gamma_n(l)$ とおくことができる．

Kelly は対称待ち行列が準可逆性を有すること，従って対称待ち行列を構成ノードとする待ち行列ネットワークは積形式解を持つことを示した[1)]．また，対称型サービス規範では各ノードの状態確率がサービス時間分布に依存せず，その平均のみによって特徴づけられる．このような性質を不感性（insensitivity）と呼ぶ．実際，上記三つのサービス規範は BCMP 定理を満足するサービス規範であり，しかもこれら 3 種類のサービス規範ではサービス時間分布が一般であることが許されている．

待ち行列が対称であるという条件は，待ち行列ネットワークが積形式解を持つための十分条件に過ぎないということに注意する．例えば先着順サービス（FCFS）では，$\gamma_n(l)$ と $\delta_n(l)$ は以下のように与えられる．

$$\gamma_n(l) = \begin{cases} 1, & l = 1, \\ 0, & l = 2, 3, \ldots, n, \end{cases} \qquad\qquad \delta_n(l) = \begin{cases} 0, & l = 1, 2, \ldots, n-1 \\ 1, & l = n. \end{cases}$$

これより式 (5･15) は FCFS では成立していないことがわかる．しかしながら，BCMP の定理より，FCFS の場合でも客のサービス時間が指数分布であれば積形式解を持つ．

■参考文献

1) F.P. Kelly, Rversibility and Stochastic Networks, Wiley, 1979.
2) H. Kobayashi and B.L. Mark, System Modeling and Analysis, Pearson Education, 2009.
3) 紀一誠, 待ち行列ネットワーク, 朝倉出版, 2002.
4) 宮沢政清, “待ち行列ネットワークと積形式解,” オペレーションズ・リサーチ, vol.43, no.8, pp.442-448, 1998.
5) 宮沢政清, 待ち行列の数理とその応用, 牧野書店, 2006.

■5 群 - 1 編 - 5 章

5-4 待ち行列ネットワークの計算アルゴリズム

（執筆者：笠原正治）[2009 年 10 月 受領]

積形式解を持つ待ち行列ネットワークでは，特定ノードのスループットや利用率，平均客数や待ち時間といった性能評価量を，積形式解の結果を基に数値的に計算することができる．このとき，正規化定数の計算が必要となるが，開放型待ち行列ネットワークではこの正規化定数の計算が比較的簡単に行えることが知られている．例えばジャクソンネットワークでは，式 (5･1)〜式 (5･3) より，系内客数の結合分布における正規化定数は各ノードの正規化定数を求める問題に帰着される．また，BCMP タイプの開放型ネットワークでは，正規化定数は対応する閉鎖型待ち行列ネットワークから得られる正規化定数より求められることが知られている．そのため，閉鎖型待ち行列ネットワークにおける正規化定数の計算が鍵となるが，この計算量は系内の客数やノード数などで指数的に増大するため，計算量を減らす工夫が重要である．ここでは代表的なたたみ込み法（convolution algorithm）と平均値解析法（mean value analysis: MVA）の二つの方法を概説する．

5-4-1 たたみ込み法

たたみ込み法は Buzen[1)]が最初に提案した単一クラス閉鎖型待ち行列網の正規化定数計算用アルゴリズムである．本節では単一クラスの Gordon-Newell ネットワークを考えるが，ここでの結果は複数クラスに対して容易に拡張することが可能である．

今，網内のノード数は N であり，客の総数は K である Gordon-Newell ネットワークを考える．客数の結合分布は式 (5･5)，正規化定数 $G(K)$ は式 (5･6) で与えられる．ここで $G(j,k)$ を次式で定義する．

$$G(j,k) = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_j=k} \prod_{i=1}^{j} f_i(n_i) \tag{5･16}$$

正規化定数は $G(K) = G(N,K)$ で与えられることに注意する．式 (5･16) は $j > 1$ に対して次式のように変形することができる．

$$G(j,k) = \sum_{m=0}^{k} f_j(m) \left(\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_{j-1}=k-m} \prod_{i=1}^{j-1} f_i(n_i) \right) = \sum_{m=0}^{k} f_j(m) \cdot G(j-1,k-m) \tag{5･17}$$

式 (5･17) の最終形はたたみ込み演算となっており，以下の初期条件を用いて再帰的に $G(j,k)$ を計算することができる．

$$\begin{aligned} G(1,k) &= f_1(k), \qquad k = 1,\ldots,K \\ G_j(0) &= 1, \qquad j = 1,\ldots,N \end{aligned}$$

$G(j,k)$ を用いて系内客数の周辺分布や注目ノードのスループットといった性能評価量を計算することができる．$\pi_N(k)$ をノード N の系内客数分布と定義すると，$\pi_N(k)$ は次式で計算できる．

$$\pi_N(k) = \frac{G(N-1, K-k)}{G(N,K)} f_N(k), \qquad k = 1, \ldots, K \tag{5・18}$$

他ノードの系内客数分布を計算するには，該当ノードのノード番号が N になるようにすべてのノードの番号を変更し，式 (5･18) を計算する．

また，ノード i のスループット θ_i は次式で与えられる．

$$\theta_i = \frac{G(N, K-1)}{G(N,K)} e_i, \qquad i = 1, \ldots, N$$

上記以外にも特定ノードの利用率や平均客数，平均応答時間といった諸量が $G(j,k)$ を用いて計算できる．詳しくは文献 2, 3) などを参照されたい．

5-4-2 平均値解析法

平均値解析法（mean value analysis）は，積形式解を持つ閉鎖型待ち行列網の平均待ち行列長や平均待ち時間，スループットといった性能評価量を正規化定数を計算することなしに導出する計算法であり，Reiser と Lavenberg によって提案された[4)]．平均値解析法のアイデアは，リトルの公式と以下に示す到着定理の応用にある．

到着定理（arrival theorem）

客の母集団が K 人である閉鎖型ジャクソン網において，あるノードに到着する客が到着直前に見るそのノードの系内客数分布は，客の母集団が $K-1$ 人のときの当該ノードの系内客数定常分布と一致する．

ノード i $(1 \leq i \leq N)$ に到着する客がそのノード内に n 人の客を見いだす確率を $a_i(n,K)$ $(n \geq 0)$，母集団が K 人のときにノード i で n 人の客が存在する確率を $\pi_i(n,K)$ とすると，到着定理は $a_i(n,K) = \pi_i(n, K-1)$ が成立することを意味する．以下では単一クラスで客の母集団が K 人であり，ノード数が N，すべてのノードにおいてサーバ数が 1 人である Gordon-Newell 網に対する平均値解析法を紹介する．

今，1 人の客がノード i を訪問したときに費やす滞在時間の平均を $\overline{T}_i(K)$ とする．ノード i への到着客が n 人の客を見いだすとき，その客の平均滞在時間は $(n+1)/\mu_i$ で与えられることに注意すると $\overline{T}_i(K)$ は次式で与えられる．

$$\overline{T}_i(K) = \frac{1}{\mu_i} \sum_{n=0}^{K-1} (n+1) a_i(n,K) \tag{5・19}$$

母集団が K 人のときのノード i における平均系内客数を $\overline{N}_i(K)$ とすると，$\overline{N}_i(K) = \sum_{n=0}^{K} n \cdot \pi_i(n,K)$ で与えられる．式 (5･19) に到着定理を適用すると

$$\overline{T}_i(K) = \frac{1}{\mu_i} \sum_{n=0}^{K-1} (1 + \overline{N}_i(K-1)) \tag{5・20}$$

式 (5･4) の非零の解 e_i $(1 \leq i \leq N)$ はノード i への相対的な訪問頻度を表すことに注意す

ると，特定の客がノード i を離脱してからノード i を訪問して再び離脱するまでの時間は $\sum_{j=1}^{N} e_j \overline{T}_j(K)/e_i$ で与えられる．母集団が K 人であることに注意すると，ノード i の到着率は最終的に $Ke_i/\sum_{j=1}^{N} e_j \overline{T}_j(K)$ となる．ここでノード i の平均系内客数 $\overline{N}_i(K)$ はリトルの公式より次式で表現される．

$$\overline{N}_i(K) = \frac{Ke_i}{\sum_{j=1}^{N} e_j \overline{T}_j(K)} \overline{T}_i(K) \tag{5･21}$$

すべての i に対して $\overline{N}_i(0) = 0$ と初期値を設定し，式 (5･20) と式 (5･21) を再帰的に用いることにより，各ノードの平均滞在時間，平均系内客数，スループットを計算することができる．

客のクラスが複数ある場合や，待ち行列長に依存したサービス率を持つ場合の平均値解析法，計算アルゴリズムの高速化に関する話題については文献 2, 5, 6) を参照されたい．

■参考文献

1) J.P. Buzen, “Computational Algorithms for Closed Queueing Networks with Exponential Servers,” Commun. ACM, vol.16, no.9, pp.527-531, 1973.
2) H. Kobayashi and B.L. Mark, System Modeling and Analysis, Pearson Education, 2009.
3) 紀一誠, 待ち行列ネットワーク, 朝倉出版, 2002.
4) M. Reiser and S.S. Lavenberg, “Mean-Value Analysis of Closed Multichain Queuing Networks,” J. ACM, vol.27, no.2, pp.313-322, 1980.
5) G. Bolch, S. Greiner, H. de meer, and K.S. Trivede, Queueing Networks and Markov Chains, 2nd ed., Wiley, 2006.
6) 亀田壽夫, 紀一誠, 李頡, 性能評価の基礎と応用, 共立出版, 1998.