■5 群（通信・放送）- 1 編（待ち行列理論とシミュレーション）

4 章　バーストトラヒックモデル

（執筆者：滝根哲哉）［2009 年 4 月 受領］

■概要■

バーストトラヒック（bursty traffic）とは，一旦，パケットの到着が起こると，その後も，次々とパケットが到着するという性質をもつトラヒックの総称である．通信トラヒック理論における最も基本的なトラヒックモデルであるポアソン過程では，交わらない時間区間内に到着するパケット数は互いに独立な確率変数となるという性質をもつ．一方，バーストトラヒックでは，交わらない時間区間内に到着するパケット数が従属する確率変数となる．本章では，このようなバーストトラヒックのモデルを紹介する．

【本章の構成】

本章では，断続ポアソン過程と交代ポアソン過程（4-1），マルコフ変調ポアソン過程とマルコフ到着過程（4-2），分枝ポアソン過程（4-3）について，基本的な事項をまとめる．

■5 群 - 1 編 - 4 章

4-1 断続ポアソン過程と交代ポアソン過程

（執筆者：滝根哲哉）[2009 年 4 月 受領]

バーストトラヒックの内，最も簡単なものは以下のようにして構成することができる．今，パラメタ α_1 をもつ指数分布に従う時間間隔とパラメタ α_2 をもつ指数分布に従う時間間隔が交互に繰り返される交番再生過程（alternating renewal process）があるとする．パラメタ α_1 の指数分布に従う時間間隔の間は率 λ_1 のポアソン過程に従いパケットが到着する．一方，パラメタ α_2 の指数分布に従う時間間隔の間はパケットが全く到着しないとする．このような到着過程を断続ポアソン過程（interrupted Poisson process）という．

断続ポアソン過程は，通常の率 λ_1 をもつ斉時ポアソン過程において，パラメタ α_2 をもつ指数分布に従う時間間隔の間に到着したすべてのパケットを「間引く」ことにより得られると見ることができる．この観察から，有限容量の待ち行列システムにおいて，システムが一杯のため収容することができず，あふれ出るトラヒックのモデル化に利用されてきた．

時間間隔 $(s,t]$（$s \leq t$）の間に到着するパケット数を $N(s,t]$ と書くことにする．上で定義される定常な断続ポアソン過程では，

$$E(N(s,t]) = \frac{\lambda_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}(t-s)$$

となり，平均到着率 λ は $\lambda_1\alpha_2/(\alpha_1+\alpha_2)$ で与えられる．さらに，連続する二つのパケットの到着間隔 X は独立同一な 2 次の超指数分布に従う．

$$\Pr(X \leq x) = 1 - \frac{\lambda_1 - r_{\mathrm{IPP}}^-}{r_{\mathrm{IPP}}^+ - r_{\mathrm{IPP}}^-}\exp\left(-r_{\mathrm{IPP}}^+ x\right) - \frac{r_{\mathrm{IPP}}^+ - \lambda_1}{r_{\mathrm{IPP}}^+ - r_{\mathrm{IPP}}^-}\exp\left(-r_{\mathrm{IPP}}^- x\right)$$

ただし

$$r_{\mathrm{IPP}}^+, r_{\mathrm{IPP}}^- = \frac{\lambda_1+\alpha_1+\alpha_2 \pm \sqrt{(\lambda_1+\alpha_1-\alpha_2)^2+4\alpha_1\alpha_2}}{2}$$

一方，交わらない二つの区間 $(s_1,t_1]$，$(s_2,t_2]$（$s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$）の間に到着するパケット数の共分散 $Cov(N(s_1,t_1],N(s_2,t_2])$ は正となる．すなわち，断続ポアソン過程における交わらない二つの区間に到着するパケット数は正の相関をもつ．一般にパケットの到着間隔が独立同一な分布に従っていたとしても，交わらない時間区間内に到着するパケット数は相関をもつ．

次に，断続ポアソン過程を拡張し，パラメタ α_2 の指数分布に従う時間間隔の間も，率 λ_2 $(\lambda_2 \neq \lambda_1)$ のポアソン過程に従いパケットが到着すると仮定する．この場合，率 λ_1 で到着が起こる期間と率 λ_2 で到着が起こる期間が交互に繰り返されることになる．このような到着過程は交代ポアソン過程（switched Poisson process: SPP）と呼ばれる．なお，$\lambda_1 = \lambda_2$ のときは斉時ポアソン過程となる．また，$\lambda_2 = 0$ の場合は断続ポアソン過程となる．

このように定義される定常な交代ポアソン過程における，時間間隔 $(s,t]$（$s \leq t$）の間に到着するパケット数 $N(s,t]$ は

$$E(N(s,t]) = \frac{\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}(t-s)$$

となり，平均到着率 λ は $(\lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1)/(\alpha_1 + \alpha_2)$ で与えられる．さらに，連続する二つのパケットの到着間隔 X は以下で与えられる 2 次の超指数分布に従うが，到着間隔の列は正の相関をもつ．

$$\Pr(X \le x) = 1 - \frac{\zeta - r^-_{\mathrm{SPP}}}{r^+_{\mathrm{SPP}} - r^-_{\mathrm{SPP}}} \exp\left(-r^+_{\mathrm{SPP}} x\right) - \frac{r^+_{\mathrm{SPP}} - \zeta}{r^+_{\mathrm{SPP}} - r^-_{\mathrm{SPP}}} \exp\left(-r^-_{\mathrm{SPP}} x\right)$$

ただし

$$r^+_{\mathrm{SPP}}, r^-_{\mathrm{SPP}} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2 \pm \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}}{2}$$

$$\zeta = \frac{\lambda_1^2\alpha_2 + \lambda_2^2\alpha_1}{\lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1}$$

また，交わらない二つの区間 $(s_1, t_1]$，$(s_2, t_2]$（$s_1 < t_1 \le s_2 < t_2$）の間に到着するパケット数の共分散 $Cov(N(s_1, t_1], N(s_2, t_2])$ も正となり，交代ポアソン過程における交わらない二つの区間に到着するパケット数は正の相関をもつ．

■5 群 - 1 編 - 4 章

4-2 マルコフ変調ポアソン過程とマルコフ到着過程

（執筆者：滝根哲哉）［2009 年 4 月 受領］

断続ポアソン過程や交代ポアソン過程では，パケットの到着を支配する背後過程として，2 状態連続時間マルコフ連鎖が用いられていた．この背後過程を三つ以上の状態をもつように拡張したものにマルコフ変調ポアソン過程がある．さらに，背後過程が遷移した場合にも，それに付随して到着を許すマルコフ到着過程がある．後に示すように，マルコフ到着過程を用いると，待ち行列理論で用いられる様々な到着過程を統一的に表現することができる．

4-2-1 マルコフ変調ポアソン過程

マルコフ変調ポアソン過程（Markov-modulated Poisson process: MMPP）は，2 状態連続時間マルコフ連鎖で与えられる背後過程をもつ交代ポアソン過程を任意の状態数をもつ背後過程へと拡張した確率過程であり，以下のように定義される．背後過程である連続時間マルコフ連鎖は M 個の状態をもつ．状態 i $(i = 1, 2, \ldots, M)$ の滞在時間は率 α_i の指数分布に従う．状態 i の滞在後，確率 $p_{i,j}$ $(j \neq i)$ で状態 j に遷移する．マルコフ連鎖が状態 i にいるとき，率 λ_i のポアソン過程に従い客が到着する．$\boldsymbol{R}$ を背後過程である M 状態連続時間マルコフ連鎖の推移率行列とする．$\boldsymbol{R}$ の (i, j) 要素は次式で与えられる．

$$[\boldsymbol{R}]_{i,j} = \begin{cases} -\alpha_i, & i = j \\ \alpha_i p_{i,j}, & i \neq j \end{cases}$$

ここで，$\boldsymbol{Re} = \boldsymbol{0}$ に注意する．ただし，$\boldsymbol{e}$ は すべての要素が 1 の列ベクトルである．このマルコフ連鎖の定常状態確率ベクトルを $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_M)$ とすると

$$\boldsymbol{\pi R} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{\pi e} = 1$$

を満たす．以下では，状態 i における平均到着率 λ_i を i 番目の対角要素にもつ対角行列を $\boldsymbol{\Lambda}$ で表す．

N_t を 区間 $(0, t]$ に到着する客の数とする．さらに S_t を時刻 t におけるマルコフ連鎖の状態とする．$\boldsymbol{N}(n, t)$ を $M \times M$ 行列とし，その (j, k) 要素は $\Pr(N_t = n, S_t = k \mid S_0 = j)$ で与えられるとする．$\boldsymbol{N}^*(z, t)$ を $\boldsymbol{N}(n, t)$ の行列母関数とする．

$$\boldsymbol{N}^*(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{N}(n, t) z^n$$

このとき

$$\boldsymbol{N}^*(z, t) = \exp[(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{\Lambda} + z\boldsymbol{\Lambda})t]$$

を得る．ただし，ここで現れる行列指数は

$$\exp(\boldsymbol{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}$$

で定義される（$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$）．平均到着率を λ とすると，これは

$$\lambda = \boldsymbol{\pi}\frac{d}{dz}\boldsymbol{N}^*(z,1)\,|_{z=1}\;\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\pi\Lambda e} = \sum_{i=1}^{M}\pi_i\lambda_i$$

で与えられる．

一方，到着間隔 X の分布関数は

$$\Pr(X \le x) = 1 - \frac{\boldsymbol{\pi\Lambda}}{\boldsymbol{\pi\Lambda e}}\exp[(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{\Lambda})t]\boldsymbol{e}$$

で与えられる．

4-2-2 マルコフ到着過程

マルコフ到着過程（Markovian arrival process: MAP）は連続時間有限状態マルコフ連鎖によって変調される到着過程である．到着を支配する連続時間マルコフ連鎖の状態数を M で表す．このとき，マルコフ到着過程は二つの $M \times M$ 行列 $\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ で表現される．ここで $\boldsymbol{C}$ の対角要素は負であり，$\boldsymbol{C}$ の他の要素並びに $\boldsymbol{D}$ のすべての要素は非負である．さらに，到着を支配するマルコフ連鎖の推移率行列は $\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}$ で与えられる．それゆえ，$(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D})\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$ である．このマルコフ連鎖の定常状態確率ベクトルを $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_M)$ とすると

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}) = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{\pi e} = 1 \tag{4・1}$$

を満たす．マルコフ到着過程では $\boldsymbol{D}$ で記述される状態遷移が起こったとき，1 人の客が到着する．N_t を 区間 $(0,t]$ に到着する客の数とする．さらに S_t を時刻 t におけるマルコフ連鎖の状態とする．$\boldsymbol{N}(n,t)$ を $M \times M$ 行列とし，その (j,k) 要素は $\Pr(N_t = n, S_t = k \mid S_0 = j)$ で与えられるとする．$\boldsymbol{N}^*(z,t)$ を $\boldsymbol{N}(n,t)$ の行列母関数とする．

$$\boldsymbol{N}^*(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{N}(n,t)z^n$$

このとき

$$\boldsymbol{N}^*(z,t) = \exp((\boldsymbol{C} + z\boldsymbol{D})t) \tag{4・2}$$

を得る．平均到着率を λ とすると，これは

$$\lambda = \boldsymbol{\pi}\frac{d}{dz}\boldsymbol{N}^*(z,1)\,|_{z=1}\;\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\pi D e}$$

で与えられる．一方，到着間隔 X の分布関数は

$$\Pr(X \le x) = 1 - \frac{\boldsymbol{\pi D}}{\boldsymbol{\pi D e}}\exp(\boldsymbol{C}t)\boldsymbol{e}$$

で与えられる．

マルコフ到着過程はあらゆる定常点過程を任意の精度で近似的に表現できることが知られている[1)].

4-2-3 種々の到着過程のマルコフ到着過程による表現

マルコフ到着過程は様々な到着過程を統一的に記述することができる．以下では，幾つかの例に対してマルコフ到着過程を用いた表現を与える．

- ポアソン到着は，$M = 1$ の場合に対応する．よって $\boldsymbol{C} = -\lambda$，$\boldsymbol{D} = \lambda$ である．

- 2 ステージアーラン到着（平均到着率 λ）は次のように考えることができる．到着を支配するマルコフ連鎖は二つの状態 1 と 2 をもち，各々の状態の滞在時間は率 2λ の指数分布に従う．パケットの到着は状態 2 から状態 1 への遷移に伴い起こる．よって

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

　となる．

- 以下のような 2 ステージ超指数分布到着を考える．パケットの到着間隔は，確率 p で率 λ_1 の指数分布に従い，確率 $1 - p$ で率 λ_2 の指数分布に従う．これは以下のように考えることができる．状態 1 と 2 を持つマルコフ連鎖があり，各々の状態の滞在時間は λ_1，λ_2 の指数分布に従う．各状態での滞在が終了するとパケットが到着する．客の到着直後の状態は確率 p で状態 1 であり，確率 $1 - p$ で状態 2 である．よって

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} p\lambda_1 & (1-p)\lambda_1 \\ p\lambda_2 & (1-p)\lambda_2 \end{pmatrix}$$

　となる．

- 有限状態連続時間吸収マルコフ連鎖における吸収状態へ至までの初到達時間（first passage time）が従う分布を相型分布（phase-type distribution）という．過渡的な状態の数を M としたとき，相型分布は $1 \times M$ 確率ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ と連続時間吸収マルコフ連鎖の過渡状態間の遷移を表す $M \times M$ 行列 $\boldsymbol{T}$ で特徴づけられ，その分布関数は

$$\Pr(X \leq x) = 1 - \boldsymbol{\alpha} \exp(\boldsymbol{T}x)\boldsymbol{e}$$

　で与えられる．到着間隔が独立同一な $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T})$ で特徴づけられる相型分布に従う到着過程を相型再生過程（phase-type renewal process）という．すなわち，行列 $\boldsymbol{T}$ はマルコフ到着過程における行列 $\boldsymbol{C}$ に対応する．客が到着した直後の状態は，客の到着直前にマルコフ連鎖がどの状態にあったかという事象とは独立に，初期状態ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ によって決定される．定義より，$-\boldsymbol{Te}$ の i 番目の要素は，状態 i から吸収状態への遷移する率（すなわち，パケットが到着する率）を表す．以上より，$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T})$ で特徴づけられる相型再生過程をマルコフ到着過程で表すと

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{T}, \qquad \boldsymbol{D} = -\boldsymbol{Te\alpha}$$

となる．

なお，2 ステージアーラン分布や超指数分布は相型分布の最も単純な例である．すなわち，到着間隔がこれらの分布に従う場合，対応するマルコフ到着過程における行列 $\boldsymbol{D}$ は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} p\lambda_1 & (1-p)\lambda_1 \\ p\lambda_2 & (1-p)\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix}$$

となり，それぞれ $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0), (p, 1-p)$ をもつ相型再生過程となる．

- 本章 4–2–1 で紹介したマルコフ変調ポアソン過程では，背後過程である連続時間マルコフ連鎖が状態 i にあるとき，二つの事象が同時に走っている．一つは客の到着（率 λ_i）であり，もう一つは状態の遷移（率 α_i）である．マルコフ到着過程ではこれらをまとめて扱う．すなわち，状態 i にいたとき，率 α_i で遷移が起これば，客の到着はなく，確率 $p_{i,j}$ で次の状態 j が選ばれる．一方，率 λ_i で遷移が起これば，客が到着し，到着直後の状態は元と同じ状態 i である．これより，上の M 状態マルコフ変調ポアソン過程を マルコフ到着過程で表現すると

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{\Lambda}, \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{\Lambda}$$

となる．

特に，$M = 2$ の場合，交代ポアソン過程となる．さらに $M = 2$ かつ $\lambda_2 = 0$ のとき，この 2 状態マルコフ変調ポアソン過程は断続ポアソン過程となる．この場合，

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり，相型再生過程（$\boldsymbol{\alpha} = (1, 0)$）で表現できることが分かる．すなわち，本章 4-1 で述べたように，断続ポアソン過程における客の到着は独立同一な分布に従う．

- 二つの独立なマルコフ到着過程の重畳を考える．個々のマルコフ到着過程はそれぞれ，$(\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{D}_1)$，$(\boldsymbol{C}_2, \boldsymbol{D}_2)$ で与えられるとする．このとき，これらを重ね合わせた確率過程は，再びマルコフ到着過程となる．これを理解するため，次の例を考える．

$$\boldsymbol{C}_i = \begin{pmatrix} c_{11}^{(i)} & c_{12}^{(i)} \\ c_{21}^{(i)} & c_{22}^{(i)} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D}_i = \begin{pmatrix} d_{11}^{(i)} & d_{12}^{(i)} \\ d_{21}^{(i)} & d_{22}^{(i)} \end{pmatrix}$$

これら二つのマルコフ到着過程を重ね合わせたとき，各々の状態は 2 組 (i, j) $(i, j = 1, 2)$ で与えられる．まず，重ね合わせた場合の行列 $\boldsymbol{D}$ を考える．これは，

$$
\boldsymbol{D} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) \end{array} \\ \begin{array}{c} (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array} & \begin{pmatrix} d_{11}^{(1)} + d_{11}^{(2)} & d_{12}^{(2)} & d_{12}^{(1)} & 0 \\ d_{21}^{(2)} & d_{11}^{(1)} + d_{22}^{(2)} & 0 & d_{12}^{(1)} \\ d_{21}^{(1)} & 0 & d_{22}^{(1)} + d_{11}^{(2)} & d_{12}^{(2)} \\ 0 & d_{21}^{(1)} & d_{21}^{(2)} & d_{22}^{(1)} + d_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \end{array}
$$

$$
= \begin{pmatrix} d_{11}^{(1)} & 0 & d_{12}^{(1)} & 0 \\ 0 & d_{11}^{(1)} & 0 & d_{12}^{(1)} \\ d_{21}^{(1)} & 0 & d_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & d_{21}^{(1)} & 0 & d_{22}^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{11}^{(2)} & d_{12}^{(2)} & 0 & 0 \\ d_{21}^{(2)} & d_{22}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{11}^{(2)} & d_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 & d_{21}^{(2)} & d_{22}^{(2)} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} d_{11}^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & d_{12}^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ d_{21}^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & d_{22}^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} d_{11}^{(2)} & d_{12}^{(2)} \\ d_{21}^{(2)} & d_{22}^{(2)} \end{pmatrix} & O \\ O & 1 \begin{pmatrix} d_{11}^{(2)} & d_{12}^{(2)} \\ d_{21}^{(2)} & d_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \end{pmatrix}
$$

となる．ここでクロネッカー積（Kronecker product）

$$
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} & b \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ c \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} & d \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \end{pmatrix}
$$

を導入すると

$$
\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_1 \otimes \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{D}_2
$$

と書くことができる．さらに，この右辺の演算 $\boldsymbol{D}_1 \otimes \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{D}_2$ は行列 $\boldsymbol{D}_1$ と $\boldsymbol{D}_2$ のクロネッカー和（Kronecker sum）と呼ばれ

$$
\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_1 \oplus \boldsymbol{D}_2
$$

と書かれる．同様に考えると，$\boldsymbol{C}$ も

$$
\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1 \oplus \boldsymbol{C}_2
$$

で与えられることがわかる．よって，二つの独立なマルコフ到着過程 $(\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{D}_1)$, $(\boldsymbol{C}_2, \boldsymbol{D}_2)$ の重畳は再びマルコフ到着過程となり $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{C}_1 \oplus \boldsymbol{C}_2, \boldsymbol{D}_1 \oplus \boldsymbol{D}_2)$ で与えられる．

4-2-4 マルコフ到着過程の計算手法

一般に，マルコフ到着過程で記述されるトラヒックモデルでは，サービス時間の間に到着する客数の分布や積率を数値的に求めることになる．本章 4-2-4 では，待ち行列モデルを考察する際に必要となるこれらの量の計算手法を示す.

まず，1 人の客のサービス時間内に到着する客数を考える．客のサービス時間の分布関数を $H(x)$ とし，N を 1 人の客のサービス時間内に到着する客数とする．S_0 と S_e をそれぞれサービスの開始時点ならびに終了時点における到着を支配するマルコフ連鎖の状態とする．$\boldsymbol{A}(z)$ を $M \times M$ 行列とし，その (i, j) 要素は

$$[\boldsymbol{A}(z)]_{i,j} = E[z^N 1_{\{S_e=j\}} \mid S_0 = i] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \Pr(N = k, S_e = j \mid S_0 = i)$$

で与えられるものとする．式 (4･2) より，$\boldsymbol{A}(z)$ は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{A}(z) = \int_0^{\infty} \exp((\boldsymbol{C} + z\boldsymbol{D})x)dH(x)$$

$\boldsymbol{A}_k$ $(k \geq 0)$ を $M \times M$ 行列とし，その (i, j) 要素は

$$[\boldsymbol{A}_k]_{i,j} = \Pr(N = k, S_e = j \mid S_0 = i)$$

で与えられるものとする．定義より $\boldsymbol{A}_k$ は

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}_k z^k = \boldsymbol{A}(z)$$

を満たす．

このとき，定義より

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}_k z^k &= \int_0^{\infty} \exp(-\theta x) \exp((\theta \boldsymbol{I} + \boldsymbol{C} + z\boldsymbol{D})x)dH(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n [\boldsymbol{I} + \theta^{-1}(\boldsymbol{C} + z\boldsymbol{D})]^n \qquad (4･3)\end{aligned}$$

を得る．ただし θ と γ_n $(n \geq 0)$ は

$$\theta = \max_i(-[\boldsymbol{C}]_{i,i}), \quad \gamma_n = \int_0^{\infty} \exp(-\theta x)\frac{(\theta x)^n}{n!}dH(x) \qquad (4･4)$$

で与えられる．θ を導入するこのような手法は，一様化（uniformazation）と呼ばれており，以下に見るように，実際に計算する際に非負の数の加算，乗算のみで扱えるようにするための手法である．

さて，$[\boldsymbol{I}+\theta^{-1}(\boldsymbol{C}+z\boldsymbol{D})]^n$ を展開するために $M\times M$ 行列 $\boldsymbol{F}_n(k)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, k = 0, 1, \ldots, n)$ を導入する．ただし $\boldsymbol{F}_n(k)$ は

$$\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{F}_n(k)z^k = [\boldsymbol{I} + \theta^{-1}(\boldsymbol{C} + z\boldsymbol{D})]^n \qquad (4･5)$$

を満たし，かつ $\boldsymbol{F}_0(0) = \boldsymbol{I}$ である．よって式 (4･5) を式 (4･3) へ代入することにより

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{F}_n(k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{n=k}^{\infty} \gamma_n \boldsymbol{F}_n(k) \tag{4・6}$$

を得る．これより $\boldsymbol{A}_k$ $(k \geq 0)$ は

$$\boldsymbol{A}_k = \sum_{n=k}^{\infty} \gamma_n \boldsymbol{F}_n(k)$$

で与えられることが分かる．一方，$\boldsymbol{F}_n(k)$ は

$$\boldsymbol{F}_{n+1}(k) = \begin{cases} \boldsymbol{F}_n(0)(\boldsymbol{I} + \theta^{-1}\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{I} + \theta^{-1}\boldsymbol{C})^{n+1}, & k = 0 \\ \boldsymbol{F}_n(k)(\boldsymbol{I} + \theta^{-1}\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{F}_n(k-1)(\theta^{-1}\boldsymbol{D}), & 1 \leq k \leq n \\ \boldsymbol{F}_n(n)(\theta^{-1}\boldsymbol{D}) = (\theta^{-1}\boldsymbol{D})^{n+1}, & k = n+1 \end{cases}$$

より計算される[2, 10]．なお，定義より，行列 $\boldsymbol{I} + \theta^{-1}\boldsymbol{C}$ のすべての要素は非負である．

次に，行列 $\boldsymbol{A}(z)$ の m 階微分を $z = 1$ で評価した値 $\boldsymbol{A}^{(m)}$ の計算方法を示す．

$$\boldsymbol{A}^{(m)} = \frac{d}{dz}\boldsymbol{A}(z)|_{z=1}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{4・7}$$

定義より

$$[\boldsymbol{A}^{(m)}]_{i,j} = E[N(N-1)\cdots(N-m+1)1_{\{S_e=j\}} \mid S_0 = i]$$

である．まず，式 (4・6) より

$$\boldsymbol{A}^{(m)} = \sum_{n=m}^{\infty} \gamma_n \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k!}{(k-m)!} \boldsymbol{F}_n(k)$$

を得る．ただし，$\boldsymbol{A}^{(m)}$，γ_n はそれぞれ，式 (4・7)，式 (4・4) で定義されている．ここで，$M \times M$ 行列 $\boldsymbol{\Psi}_n^{(m)}$ を次式で定義する．

$$\boldsymbol{\Psi}_n^{(m)} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k!}{(k-m)!} \boldsymbol{F}_n(k)$$

このとき，$\boldsymbol{A}^{(m)}$ は

$$\boldsymbol{A}^{(m)} = \sum_{n=m}^{\infty} \gamma_n \boldsymbol{\Psi}_n^{(m)}$$

で与えられる．一方，行列 $\boldsymbol{\Psi}_n^{(m)}$ $(n \geq 0,\ m \geq 0)$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}_n^{(0)} &= (\boldsymbol{I} + \theta^{-1}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}))^n, & n \geq 0, \\ \boldsymbol{\Psi}_0^{(m)} &= \boldsymbol{0}, & m \geq 1, \\ \boldsymbol{\Psi}_{n+1}^{(m)} &= \boldsymbol{\Psi}_n^{(m)}(\boldsymbol{I} + \theta^{-1}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D})) + m\boldsymbol{\Psi}_n^{(m-1)}\theta^{-1}\boldsymbol{D}, & n \geq 1, m \geq 1 \end{aligned}$$

により，順次求めることができる．

マルコフ到着過程を入力とする待ち行列モデルの解析は，多くの場合，G/M/1 型あるいは M/G/1 型と呼ばれる構造を持ったマルコフ連鎖に帰着させて行うことが多い．詳細に関しては，文献[3)−9),11)−15)]などを参照のこと．

■参考文献

1) S. Asmussen and G. Koole, “Marked point processes as limits of Markovian arrival streams,” J. Appl. Probability,” vol.30, pp.365-372, 1993.
2) D.M. Lucantoni and V. Ramaswami, “Efficient algorithms for solving the non-linear matrix equations arising in phase type queues,” Stochastic Models, vol.1, pp.29-52, 1985.
3) D.M. Lucantoni, K.S. Meier-Hellstern, and M.F. Neuts, “A Single-server queue with server vacations and a class of non-renewal arrival processes,” Advances in Applied Probability, vol.22, pp.676-705, 1990.
4) D.M. Lucantoni, “New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process,” Stochastic Models, vol.7, pp.1-46, 1991.
5) D.M. Lucantoni, “The BMAP/G/1 queue: A tutorial,” Models and Techniques for Performance Evaluation of Computer and Communication Systems, ed. by L. Donatiello and R. Nelson, Springer Verlag, pp.330-358, 1993.
6) 牧本, 待ち行列アルゴリズム –行列解析アプローチ–, 朝倉書店, 2001.
7) M.F. Neuts, “Structured Stochastic Matrices of $M/G/1$ Type and Their Applications,” Marcel Dekker, New York, 1989.
8) V. Ramaswami, “Stable recursion for the steady state vector in Markov chains of M/G/1 type,” Stochastic Models, vol.4, pp.183-188, 1988.
9) T. Takine and T. Hasegawa, “The workload in the $MAP/G/1$ queue with state-dependent services: Its application to a queue with preemptive resume priority,” Stochastic Models, vol.10, pp.183-204, 1994.
10) T. Takine, Y. Matsumoto, T. Suda, and T. Hasegawa, “Mean waiting times in nonpreemptive priority queues with Markovian arrival and i.i.d. service processes,” Performance Evaluation, vol.20, pp.131-149, 1994.
11) T. Takine, “A nonpreemptive priority $MAP/G/1$ queue with two classes of customers,” J. Operations Research Soc. Jpn., vol.39, 266-290, 1996.
12) T. Takine, “The nonpreemptive priority MAP/G/1 queue,” Operations Research, vol.47, pp.917-927, 1999.
13) T. Takine, “A new recursion for the queue length distribution in the stationary BMAP/G/1 queue,” Stochastic Models, vol.16, pp.335-341, 2000.
14) T. Takine, “Distributional form of Little’s law for FIFO queues with multiple Markovian arrival streams and its application to queues with vacations,” Queueing Systems, vol.37, pp.31-63, 2001.
15) T. Takine, “Queue length distribution in a FIFO single-sever queue with multiple arrival streams having different service time distributions,” Queueing Systems, vol.39, pp.349-375, 2002.

■5 群 - 1 編 - 4 章

4-3 分枝ポアソン過程

（執筆者：滝根哲哉）[2009 年 4 月 受領]

実際のネットワークを流れるトラヒックは多数の利用者から送り出される情報流が重なり合ったものである．そこで，個々の利用者から送出される情報流を意識したモデルの一つに分枝ポアソン過程（branching Poisson process, Poisson cluster process）があり，これは以下のように定義される．

親パケットが率 λ のポアソン過程に従い到着する．n 番目の親パケットは，C_n 個の子パケットを生成する．ここで C_n $(n = 1, 2, \ldots)$ は独立同一な分布に従う確率変数列である．また，親パケットと 1 番目の子パケットの到着間隔，ならびに k 番目と $k+1$ 番目の子パケット $(k = 1, \ldots, C_n - 1)$ の到着間隔も独立同一な確率変数列である．

親パケットは個々の利用者の通信開始直後のパケットに相当し，子パケットはそれに引き続く一連の情報転送パケットに相当する．これらが重畳された状況を表す到着過程が分枝ポアソン過程である．G を任意の親パケットとそれに続く子パケットの総数を表す確率変数とする．このとき，平均到着率は $\lambda E[G]$ で与えられる．

残念ながら分枝ポアソン過程は単純な構造を持っておらず，一般的な枠組で得られる結果は限定的である[1)]．そこで，以下では親パケットそれに続く子パケットならびに子パケット間の到着間隔が一定であると仮定し，τ で記述する．この場合，以下のような結果が知られている[1)]．

パケットの到着間隔 X の分布関数は次式で与えられる．

$$\Pr(X \le x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda E[G]t), & t < \tau \\ 1 - \dfrac{\exp(-\lambda(E[G]-1)\tau)}{E[G]}\exp(-\lambda t), & t \ge \tau \end{cases}$$

到着間隔の分布は G の高次積率とは独立に定まることに注意する．

N_t を定常な分枝ポアソン過程から時間間隔 $(0, t]$ の間に到着する客数とする．また，k を $k\tau < t \le (k+1)\tau$ を満たす非負整数とする．このとき $A(t)$ の平均 $E[N_t]$ と分散 $\mathrm{Var}[N_t]$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} E[N_t] &= \lambda E[G]t, \\ \mathrm{Var}[N_t] &= \lambda E[G]t + \lambda t\left[g_k^{(2)} + 2k(E[G] - g_k^{(1)})\right] \\ &\quad - \lambda\tau\left[\frac{g_k^{(3)}}{3} + g_k^{(2)} + k(k+1)(E[G] - g_k^{(1)})\right] \end{aligned}$$

ただし $g_k^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ は確率変数 $G_k = \min(G, k)$ の i 次階乗積率である．もし G の 3 次階乗積率が存在するならば，

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[N_t] &= \lambda E[G]t + \lambda t E[G(G-1)] \\ &\quad - \lambda\tau\left[\frac{E[G(G-1)(G-2)]}{3} + E[G(G-1)]\right] + o(1) \end{aligned}$$

が成立する.

■参考文献

1) P.A.W. Lewis, “A branching Poisson process model for the analysis of computer failure pattern,” J. Royal Statistical Soc., Ser. B, vol.26, pp.398-456, 1964.