

1群(信号・システム) - 9編(デジタル信号処理)

6章 変換・解析技術

(執筆者：菊池久和・村松正吾)[2009年2月受領]

概要

本章では離散信号解析の基本的なとして離散フーリエ変換(DFT)とウェーブレット変換について概説する。

【本章の構成】

本章の構成は以下のとおりである。6-1節では、離散信号解析において最も基本的かつ、最も重要な信号変換技術である離散フーリエ変換(DFT)についてその定義と意味、性質をまとめる。6-2節では、DFTを実用する上で不可欠な高速アルゴリズム、高速フーリエ変換(FFT)を紹介する。6-3節では、DFTの解析以外の応用例として循環畳み込みを紹介し、線形畳み込みとの関係を述べる。

6-4節では、フーリエ解析に変わる重要な解析理論として多重解像度解析の概念について解説する。続く6-5節では具体的な多重解像度解析の技術として、ウェーブレット変換の設計法について述べる。最後に、ウェーブレット変換の重要な応用の一つである画像処理との関係に言及し、特徴的なウェーブレット変換についてまとめる。

1群-9編-6章

6-1 離散フーリエ変換 (DFT)

(執筆: 村松正吾) [2009年2月受領]

フーリエ解析理論によれば、信号は様々な周波数の複素正弦波の重み付け和に展開できる。離散フーリエ変換 (DFT: Discrete Fourier Transform) は、有限長の離散信号 (数列) に対して定義されるフーリエ解析手法で、コンピュータによる計算に適していることから実用性に優れる。

6-1-1 定義

N 点の数列 $x[n]$ に対し、DFT は、

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.1)$$

と定義される¹⁾。ただし、 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ である。 W_N は回転子 (twiddle factor) とよばれる。DFT 係数 $X[k]$ も数列 $x[n]$ と同様に N 点の離散数列となる。数列 $x[n]$ は、DFT 係数 $X[k]$ によって重み付けられた回転子 W_N のべき乗の和として

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.2)$$

と展開される。 $X[k]$ から $x[n]$ を再構成する演算は逆 DFT (IDFT: Inverse DFT) とよばれる。表 6.1 に DFT の性質をまとめる。

6-1-2 行列表現

$N \times 1$ ベクトル $\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ 、及び $\mathbf{X} = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T$ を定義すると、DFT と IDFT は行列演算として、それぞれ、

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x} \quad (6.3)$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^\dagger \mathbf{X} \quad (6.4)$$

と表現できる。ただし、 \mathbf{W}_N は $N \times N$ 複素行列で、その k 行 n 列目要素は $[\mathbf{W}_N]_{k,n} = W_N^{kn}$ である。また、行列の上付き ' \dagger ' は、エルミート (複素共役) 転置を意味する。 \mathbf{W}_N はユニタリ行列であり、 $\mathbf{W}_N^\dagger \mathbf{W}_N = \mathbf{I}$ が成立する。

6-1-3 ほかの解析手法との関係

N 点 DFT は、数列 $x[n]$ に N 点周期を仮定した離散フーリエ級数 (DFS: Discrete Fourier Series) に等しい¹⁾。また、 $x[n]$ の離散時間フーリエ変換 (DTFT: Discrete-Time Fourier Transform) の周波数特性 1 周期分を N 点標準化することにも対応する。すなわち、 $X[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$ の関係が成り立つ¹⁾。DFT はしばしば、大きな N と共に DTFT として代用される。

表 6・1 DFT の性質 . $X[k], X_1[k], X_2[k]$ はそれぞれ数列 $x[n], x_1[n], x_2[n]$ の DFT . a, b は任意の定数 . 上付き $*$ は複素共役, $((\cdot))_N$ は N で割った余り, $\Re\{\cdot\}$ と $\Im\{\cdot\}$ はそれぞれ実数部, 虚数部を意味する . \mathcal{R} は実数集合である .

	有限長数列 (長さ N)	N 点 DFT (長さ N)
線形性	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
双対性	$X[n]$	$Nx[(-k)_N]$
循環シフト	$x[(n-m)_N]$	$W_N^{kn} X[k]$
周波数変調	$W_N^{-\ell n} x[n]$	$X[(k-\ell)_N]$
循環たたみ込み	$\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[(n-m)_N]$	$X_1[k]X_2[k]$
時間積	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} X_1[\ell]X_2[(\ell-k)_N]$
複素共役	$x^*[n]$	$X^*[(-k)_N]$
時間反転	$x^*[(n)_N]$	$X^*[k]$
実数成分	$\Re\{x[n]\}$	$X_{\text{ep}}[k] = \frac{1}{2} \{X[(k)_N] + X^*[(k)_N]\}$
虚数成分	$j\Im\{x[n]\}$	$X_{\text{op}}[k] = \frac{1}{2} \{X[(k)_N] - X^*[(k)_N]\}$
偶対称成分	$x_{\text{ep}}[k] = \frac{1}{2} \{x[n] + x^*[(n)_N]\}$	$\Re\{X[k]\}$
奇対称成分	$x_{\text{op}}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] - x^*[(n)_N]\}$	$j\Im\{X[k]\}$
実数列	$x[n] \in \mathcal{R}$	$\left\{ \begin{array}{l} X[k] = X^*[(k)_N] \\ \Re\{X[k]\} = \Re\{X[(k)_N]\} \\ j\Im\{X[k]\} = -j\Im\{X[(k)_N]\} \\ X[k] = X[(k)_N] \\ \angle X[k] = -\angle X[(k)_N] \end{array} \right.$

参考文献

- 1) A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, and J.R. Buck, "Discrete-Time Signal Processing, 2nd ed." Prentice Hall, 1999.

1群-9編-6章

6-2 高速フーリエ変換 (FFT)

(執筆者: 村松正吾) [2009年2月受領]

DFTは、信号処理アルゴリズム及びシステムの解析、設計、実現において重要な役割を果たす。特に高速アルゴリズムの存在により、DFTは多くの実際の応用における重要な構成要素となっている。DFTの高速アルゴリズムは数多く存在するが、これらアルゴリズムを総称して高速フーリエ変換 (FFT: Fast Fourier Transform) とよぶ。

6-2-1 時間間引きアルゴリズム

N が偶数のとき、 N 点 DFT は常に、

$$X[k] = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r]W_N^{2kr} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1]W_N^{2kr+k} = G[k] + W_N^k H[k],$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.5)$$

と表現できる。ただし、 $G[k] = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r]W_{N/2}^{kr}$ 、 $H[k] = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1]W_{N/2}^{kr}$ とする。ここでは $W_N^2 = W_{N/2}$ の関係を用いた。結局、 $X[k]$ は数列 $x[2r]$ の $N/2$ 点 DFT $G[k]$ の項と数列 $x[2r+1]$ の $N/2$ 点 DFT $H[k]$ に複素係数 W_N^k を掛けた項に展開できる。なお、回転子 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ の周期性

$$W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n} \quad (6.6)$$

から、 $G[k+N/2] = G[k]$ 、 $H[k+N/2] = H[k]$ となることに注意する。

前節の式 (6.3) に基づく行列演算は、複素乗算回数 N^2 回、複素加算回数 $N(N-1)$ 回と見積もられる。一方、式 (6.5) による展開によって、複素乗算回数、複素加算回数はそれぞれ、 $(N+N^2/2)$ 回、 $N^2/2$ 回と見積もられる。 $N > 2$ のとき、明らかに演算量を削減できる。

N が 2 の整数べき乗のときは、式 (6.5) の展開を繰り返すことができる。このように式 (6.5) の展開に基づく FFT を時間間引き FFT (FFT: Decimation-in-time FFT) とよぶ¹⁾。

6-2-2 バタフライ演算とシグナル・フロー

式 (6.5) より、 N 点 DFT は $k = 0, 1, \dots, N/2-1$ に対する演算

$$X[k] = G[k] + W_N^k H[k], \quad (6.7)$$

$$X[k+N/2] = G[k+N/2] + W_N^{k+N/2} H[k+N/2] = G[k] + W_N^{N/2} W_N^k H[k] \quad (6.8)$$

から構成できる。ここで、 $W_N^{N/2} = e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N}{2}} = e^{-j\pi} = -1$ という関係を利用し、複素係数 W_N^k による乗算を共有すると、2 回ある複素乗算を 1 回に削減できる。図 6.1 にこの演算のシグナル・フローを示す。図 6.1 の演算はその形からバタフライ演算とよばれる。例として、図 6.2 に $N = 8 = 2^3$ の時間間引き FFT 全体のシグナル・フローを与える。この例では、3 ステージのバタフライ演算から構成される。一般に、 $N = 2^v$ のときのステージ数は v となる。1 回のバタフライ演算は、複素乗算 1 回、複素加(減)算 2 回で実現できる。 $N = 2^v$ の時間

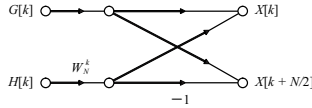


図 6.1 バタフライ演算のシグナル・フロー

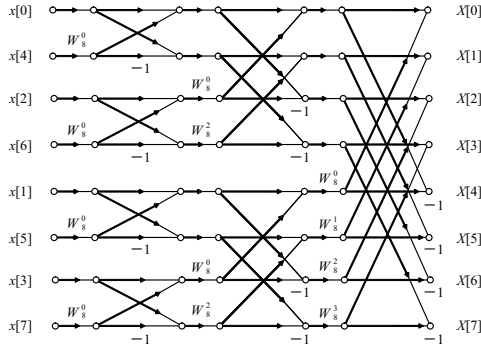


図 6.2 時間間引き FFT のシグナル・フロー ($N = 8 = 2^3$)

間引き FFT には、1 ステージ辺り $N/2$ 回のバタフライ演算が v ステージ分あるので、バタフライ演算の総数は $vN/2 = (N/2) \log_2 N$ となる。よって、複素乗算、複素加算の総数はそれぞれ、 $(N/2) \log_2 N$ 回、 $N \log_2 N$ 回と見積もられる。 N が大きいほど、効果は大きい。逆 DFT の高速アルゴリズムも同様に導かれる。

6-2-3 そのほかの高速アルゴリズム

時間間引き FFT と類似した手法に周波数間引き FFT (Decimation-in-frequency FFT) がある¹⁾。この FFT は、信号 $x[n]$ の代わりに DFT $X[k]$ を偶数と奇数のインデックスに分け、より小さなサイズの DFT に演算を帰着させる。これら分解に基づく FFT は、現在、Split-Radix FFT²⁾ などへと発展している。また、DFT 点数 N が 2 の整数べき乗ではない場合、 N の素因数分解に基づく素因数 (prime factor) FFT が利用できる¹⁾。ほかに、実信号に対する DFT の対称性を利用した実数 (real-valued) FFT^{2,3)} や入出力の一部のみを効果的に演算する枝刈り (prune) アルゴリズム⁴⁾ などがある。分解に基づく方法とは異なる高速化手法に、Winograd アルゴリズムがある。Winograd アルゴリズムは、DFT を多項式の積に帰着させる手法で、加算時間に比べ乗算時間が非常に遅い実現環境において有効とされている¹⁾。

参考文献

1) A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, and J.R. Buck, "Discrete-Time Signal Processing, 2nd ed.," Prentice Hall, 1999.

- 2) S.G. Johnson and M. Frigo, "A Modified Split-Radix FFT With Fewer Arithmetic Operations," IEEE Trans. on SP, vol.55, no.1, pp.111-119, 2007.
- 3) H. Sorensen, D. Jones, M. Heideman, and C. Burrus, "Real-valued Fast Fourier Transform Algorithms," IEEE Trans. on ASSP, vol.35, no.6, pp.849-863, 1987.
- 4) H. Sorensen and C. Burrus, "Efficient Computation of The DFT with Only A Subset of Input or Output Points," IEEE Trans. on SP, vol.41, no.3, pp.1184-1200, 1993.

1群-9編-6章

6-3 循環たたみ込み (Circular Convolution)

(執筆者: 村松正吾) [2009年2月受領]

FFTの応用の一つに高速たたみ込み演算がある。これは時間領域のたたみ込み演算をDFT積により効果的に実現する手法である。以下では、二つの有限長数列に対して定義される循環たたみ込みとDFT積の関係を示し、その線形たたみ込みへの応用について解説する。

6-3-1 定義

N 点の有限長数列 $x_1[n]$ と $x_2[n]$ を仮定する。 $x_1[n], x_2[n]$ に対し、循環たたみ込み演算は、

$$x_3[n] = x_1[n] \circledast x_2[n] \triangleq \sum_{m=0}^{N-1} x_1[(m)_N] x_2[(n-m)_N], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6\cdot9)$$

と定義される¹⁾。ここで、 $(\cdot)_N$ は N で割った余りを意味する。すなわち、 $x_1[n], x_2[n]$ を周期 N で周期化した演算となる。後述するように、交換則 $x_3[n] = x_2[n] \circledast x_1[n]$ が成り立つ。

6-3-2 循環たたみ込みと DFT 積

数列 $x_3[n]$ もまた、 N 点の有限長数列であり N 点DFTを求めることができる。

$$\begin{aligned} X_3[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x_3[n] W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x_1[(m)_N] x_2[(n-m)_N] W_N^{kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[(m)_N] W_N^{km} \sum_{n=0}^{N-1} x_2[(n-m)_N] W_N^{k(n-m)} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] W_N^{km} \sum_{\ell=0}^{N-1} x_2[\ell] W_N^{k\ell}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\because \text{回転子 } W_N \text{ の周期性}) \quad (6\cdot10) \end{aligned}$$

$x_1[n], x_2[n]$ の N 点DFTをそれぞれ $X_1[k], X_2[k]$ とすると、 $X_3[k] = X_1[k] X_2[k]$ の関係が導出される。すなわち、時間領域での循環たたみ込みはDFT係数同士の積に対応する。なお、 $X_1[k] X_2[k] = X_2[k] X_1[k]$ より、直ちに循環たたみ込みの交換則が確認される。

6-3-3 線形たたみ込みの実現

数列 $x_1[n], x_2[n]$ の長さをそれぞれ L, M と仮定する ($x_1[n] = 0, x_2[n] = 0, n < 0$)。もし、 $N \geq L + M - 1$ ならば、 $x_2[(\ell)_N] = x_2[\ell] = 0, -(L-1) \leq \ell \leq -1$ が成り立ち、 $x_1[n], x_2[n]$ の N 点循環たたみ込みは、 $0 \leq n < N$ の範囲で、

$$x_1[n] \circledast x_2[n] = \sum_{m=0}^{L-1} x_1[m] x_2[(n-m)_N] = \sum_{m=0}^{L-1} x_1[m] x_2[n-m] = x_1[n] * x_2[n] \quad (6\cdot11)$$

のように線形たたみ込みに一致する。すなわち、DFT積によって、FIRフィルタリングが実現できる。これは、インパルス応答が長いシステムの実現に有効な手法である。

参考文献

- 1) A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, and J.R. Buck, "Discrete-Time Signal Processing, 2nd ed.," Prentice Hall, 1999.

1群-9編-6章

6-4 多重解像度解析

(執筆者：菊池久和)[2009年2月受領]

6-4-1 マーラーの多重解像度解析

マーラーは、ウェーブレット変換に備わるべき部分空間の階層性を定義し、これを多重解像度解析¹⁾(MRA: Multi-Resolution Analysis)とよんだ。関数空間が、次の六つの条件を満たす閉部分空間 V_j の集合であることをいう(以下では、 $j, k \in \mathbb{Z}$, つまり j, k は整数である)。

1. $V_j \subset V_{j+1}$
2. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
3. $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$
4. $f(t) \in V_j \Rightarrow f(2t) \in V_{j+1}$
5. $f(t) \in V_j \Rightarrow f(t - 2^j k) \in V_j$
6. ある関数 $\phi(t) \in V_0$ が存在して、 $\{\phi(t - k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ が V_0 の正規直交基底をなす。

調べたい関数をこの空間に射影すれば多重解像度表現が得られる。

条件4より、関数は解像度 j が1だけ増えれば半分だけ圧縮され、より細かな変動を記述できるようになる。従って、 j の増加につれて部分空間はより豊かな表現力を獲得する。ウェーブレットを作るために、部分空間の直和が1階層だけ上位の部分空間を定める、すなわち

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad \text{ただし } V_j \perp W_j \quad (6 \cdot 12)$$

で定義される部分補空間 W_j を考える。すると、2乗可積分な空間全体が

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j} \quad (6 \cdot 13)$$

と書ける。補空間 W_0 を張る基底を $\psi(t - k)$ と書いて、ウェーブレット関数という。一方、部分空間 V_0 を張る基底 $\phi(t - k)$ をスケーリング関数という。

6-4-2 分析法としての多重解像度解析

関数をMRAを満たす空間に射影するとは、いわゆるウェーブレット変換をすることであり、サブバンド分解が行なわれる。個々のサブバンドはMRAの部分空間であり、このように変換することを「多重解像度解析を行なう」ともいう。

参考文献

- 1) S. Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation," IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell., vol.11, no.7, pp.674-693, 1989.

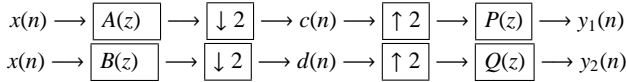
1群-9編-6章

6-5 ウェーブレット変換

(執筆者: 菊池久和) [2009年2月受領]

6-5-1 完全再構成フィルタバンク (PRFB)

下図のように, 分析側のフィルタ対 $\{A(z), B(z)\}$ と合成側のフィルタ対 $\{P(z), Q(z)\}$ からなる 2 チャネルフィルタバンクについて考える^{1, 2, 3, 4, 5)}.



三つの条件

$$A(z)P(z) + A(-z)P(-z) = 2, \tag{6\cdot 14}$$

$$B(z) = P(-z), \tag{6\cdot 15}$$

$$Q(z) = -A(-z), \tag{6\cdot 16}$$

$$\text{ただし, } -z = z e^{j\frac{2\pi}{2}} \tag{6\cdot 17}$$

を満たすとき, 合成フィルタバンクの出力を

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) \tag{6\cdot 18}$$

と定義すると,

$$y(n) \propto x(n - \ell) \tag{6\cdot 19}$$

となり, このシステムは完全再構成フィルタバンク (PRFB) となる. ここで, ℓ は正の奇数である. 式 (6\cdot 14) は縦続接続による積フィルタ $A(z)P(z)$ がハーフバンドフィルタを形成することを意味する. 逆に, ハーフバンドフィルタを因数分解すれば, $A(z), P(z)$ を定義することができる.

6-5-2 PRFB 構成法としてのリフティング

2 チャネル完全再構成フィルタバンクを考える. 以下では, 読者の筆算を想定し, 設問・解答形式で説明する. 周波数領域のリフティング操作とレギュラリティの変更操作によって新たな積フィルタ $A(z)P(z)$ を作り出し, その因数分解を通じて合成側ローパスフィルタ $p(n)$ とハイパスフィルタ $q(n)$ を定義し, これらが互いに直交することを確認する.

【問 1】 $A_0(z) = z^{-1}, P_0(z) = 1$ に対して, 周波数領域のリフティング操作^{5, 6)}

$$A_1(z) = A_0(z) + P_0(-z)S(z^2), \tag{6\cdot 20}$$

$$P_1(z) = P_0(z), \tag{6\cdot 21}$$

$$\text{ただし, } S(z) = \frac{1}{16}(-z^{-2} + 9z^{-1} + 9 - z) \tag{6\cdot 22}$$

を適用し, 新たなフィルタ対 $A_1(z)$ と $P_1(z)$ を作りなさい. なお, $A_1(z)$ が零位相でないときには, 適当な z のべき乗を乗じて零位相フィルタにし, あらためてこれを $A_1(z)$ としなさい.

$$A_1(z) = \frac{1}{16} (-z^{-4} + 0z^{-3} + 9z^{-2} + 16z^{-1} + 9z^0 + 0z^1 - z^2) \quad (6\cdot23)$$

$$P_1(z) = 1 \quad (6\cdot24)$$

$A_1(z)$ が零位相でないので, z を乗じ, あらためて $A_1(z)$ とおく.

$$A_1(z) = \frac{1}{16} (-z^{-3} + 0z^{-2} + 9z^{-1} + 16 + 9z^1 + 0z^2 - z^3) \quad (6\cdot25)$$

【問2】積フィルタ $H(z) = A_1(z)P_1(z)$ について, $H(z) + H(-z)$ を計算し, ハーフバンドフィルタであるか否か, 答えなさい.

$$H(z) + H(-z) = 2 \quad (6\cdot26)$$

ゆえに, $H(z)$ はハーフバンドフィルタである.

【問3】 $A_n(-1) = 0$ ならば, $A_n(z)$ は $\frac{1}{2}(1+z^{-1})$ で割り切れる. このとき, レギュラリティ変更操作

$$A_{n+1}(z) = \frac{A_n(z)}{\frac{1}{2}(1+z^{-1})}, \quad (6\cdot27)$$

$$P_{n+1}(z) = \frac{1}{2}(1+z^{-1})P_n(z) \quad (6\cdot28)$$

によって新たなフィルタ対 $A_2(z), P_2(z)$ を作りなさい.

$$A_2(z) = \frac{1}{8} (-z^{-2} + z^{-1} + 8z^0 + 8z^1 + z^2 - z^3) \quad (6\cdot29)$$

$$P_2(z) = \frac{1}{2}(1+z^{-1}) \quad (6\cdot30)$$

【問4】もしも可能であるならば, 同様に $A_3(z), P_3(z)$ を作りなさい.

$$A_3(z) = \frac{1}{4} (-z^{-1} + 2z^0 + 6z^1 + 2z^2 - z^3) \quad (6\cdot31)$$

$$P_3(z) = \frac{1}{4}(1+z^{-1})^2 = \frac{1}{4}(1+2z^{-1}+z^{-2}) \quad (6\cdot32)$$

【問5】もしも可能であるならば，同様に $A_4(z)$, $P_4(z)$ を作りなさい．

$$A_4(z) = \frac{1}{2}(-z^0 + 3z^1 + 3z^2 - z^3) \quad (6\cdot33)$$

$$P_4(z) = \frac{1}{8}(1 + z^{-1})^3 = \frac{1}{8}(1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}) \quad (6\cdot34)$$

【問6】もしも可能であるならば，同様に $A_5(z)$, $P_5(z)$ を作りなさい．

$$A_5(z) = -z^1 + 4z^2 - z^3 \quad (6\cdot35)$$

$$P_5(z) = \frac{1}{16}(1 + z^{-1})^4 = \frac{1}{16}(1 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + 4z^{-3} + z^{-4}) \quad (6\cdot36)$$

【問7】 $A_5(z)$ を因数分解し，零点を求めなさい．

$$A_5(z) = -z(z - 2 + \sqrt{3})(z - 2 - \sqrt{3}) \quad (6\cdot37)$$

【問8】以上のプロセスより，積フィルタが $H(z) = A_5(z)P_5(z)$ と因数分解されることが分かる．この積フィルタが $H(z) = A(z)P(z)$ と因数分解されることを確認しなさい．ただし，

$$P(z) = \frac{1}{4}(1 + z^{-1})^2 \{1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})z^{-1}\}, \quad (6\cdot38)$$

$$A(z) = \frac{1}{8}(1 + z^{-1})^2 \{1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})z^{-1}\}z^3. \quad (6\cdot39)$$

ここでは次のような変形をしてみるとよい．

$$1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})z^{-1} = z^{-1}(1 + \sqrt{3})\left(z + \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right) = z^{-1}(1 + \sqrt{3})(z - 2 + \sqrt{3}),$$

$$1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})z^{-1} = z^{-1}(1 - \sqrt{3})\left(z + \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}\right) = z^{-1}(1 - \sqrt{3})(z - 2 - \sqrt{3}).$$

これより，題意のとおり因数分解できることが分かる．

【問9】 $P(z)$ を z のべきに展開しなさい．このとき， z のべき乗の係数がインパルス応答 $p(n)$ であることから， $p(n)$ が分かる．

$$P(z) = \frac{1}{4} \left\{ (1 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})z^{-1} + (3 - \sqrt{3})z^{-2} + (1 - \sqrt{3})z^{-3} \right\} \quad (6\cdot40)$$

$$= p(0) + p(1)z^{-1} + p(2)z^{-2} + p(3)z^{-3} \quad (6\cdot41)$$

【問 10】合成側 lowpass フィルタのインパルス応答 $p(n)$ より, 合成側 highpass フィルタのインパルス応答を $q(n) = (-1)^n p(3-n)$, ただし $n = 0, 1, 2, 3$ と定義する. このとき,

$$\sum_{n=0}^3 p(n-2k)q(n) = \begin{pmatrix} \cdots & p(0) & p(1) & p(2) & p(3) & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(0) \\ q(1) \\ q(2) \\ q(3) \end{pmatrix} \quad (6\cdot42)$$

を計算しなさい. ただし, k は任意の整数. この計算結果は何を意味するか* 答えなさい.

題意により, 合成側 highpass フィルタの伝達関数 $Q(z)$ は

$$Q(z) = q(0) + q(1)z^{-1} + q(2)z^{-2} + q(3)z^{-3} \quad (6\cdot43)$$

$$= p(3) - p(2)z^{-1} + p(1)z^{-2} - p(0)z^{-3} \quad (6\cdot44)$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ (1 - \sqrt{3}) - (3 - \sqrt{3})z^{-1} + (3 + \sqrt{3})z^{-2} - (1 + \sqrt{3})z^{-3} \right\} \quad (6\cdot45)$$

と表わされる. k の値を替えて与式を計算してみる.

$$\sum_{n=0}^3 p(n)q(n) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) & p(2) & p(3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(0) \\ q(1) \\ q(2) \\ q(3) \end{pmatrix} = 0 \quad (6\cdot46)$$

$$\sum_{n=0}^3 p(n-2)q(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p(0) & p(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(0) \\ q(1) \\ q(2) \\ q(3) \end{pmatrix} = 0 \quad (6\cdot47)$$

$$\sum_{n=0}^3 p(n+2)q(n) = \begin{pmatrix} p(2) & p(3) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(0) \\ q(1) \\ q(2) \\ q(3) \end{pmatrix} = 0 \quad (6\cdot48)$$

$k = 0, \pm 1$ 以外の k については非零のインパルス応答が重ならないので, 与式の値がゼロになる. つまり, ベクトル $\{p(n)\}$ がベクトル $\{q(n)\}$ と直交していること, ならびに 2 を並進単位長とするとき $\{p(n)\}$ の並進コピーがベクトル $\{q(n)\}$ と直交していることを表す.

なお, 課題を簡単にするため, ほかの条件

* 実は $p(n), q(n)$ はドブシスの 4 タップ直交ウェーブレットシステム⁷⁾である.

$$\sum_{n=0}^3 p(n-2k)p(n) = 2\delta(k), \text{ for } \forall k \quad (6\cdot49)$$

$$\sum_{n=0}^3 q(n-2k)q(n) = 2\delta(k), \text{ for } \forall k \quad (6\cdot50)$$

$$\text{ただし, } \delta(k) = \begin{cases} 1, & \text{for } k = 0 \\ 0, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

の確認は割愛した。

以上を要約すると, lowpass filter $\{p(n)\}$ と highpass filter $\{q(n)\}$ は直交フィルタバンクの対を形成している。これがドブシスの 4 タップ直交ウェーブレットシステム^{7,8)}である。これは, 自明でない直交ウェーブレットとしてドブシスによって初めて発見された。彼女は, この発見はフィルタバンクの理論なしにはあり得なかったと述懐している。

驚くべきことに, 直交ウェーブレットの発見に先立って知られていた 5/3 タップの双直交整数型フィルタバンク式 (6\cdot31) ~ 式 (6\cdot32) とこの 4 タップ直交実数型ウェーブレットは, 以上の計算で明らかになったとおり, 同一ハーフバンドフィルタに関する異なる因数分解に対応していたのである。

補記: いま

$$L = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & p_1 \end{pmatrix} \quad (6\cdot51)$$

$$H = \begin{pmatrix} p_3 & -p_2 & p_1 & -p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & -p_2 & p_1 & -p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & -p_2 & p_1 & -p_0 \\ p_1 & -p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & -p_2 \end{pmatrix} \quad (6\cdot52)$$

とにおいて, $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} L \\ H \end{pmatrix}$ をつくと, $TT^t = I$ である。つまり, T は直交行列である。われわれは既に式 (6\cdot46) では TT^t の 1 行 5 列要素を計算したのであった。 TT^t の 1 行 1 列要素とか, 2 行 1 列要素とかを確認してみるとよい。

6-5-3 可逆算法としてのリフティング

代表的な整数型可逆ウェーブレット変換について羅列する。

(1) はじめに 1/1 変換

リフティング (昇降法)^{9,10)}では, はじめに入力時系列信号 $x(t)$ を偶数番目と奇数番目に分割する。偶数番目は粗い (coarse) 成分を表すので, $c(t)$ とかく。粗いとは大まかということだから, 低域通過成分に該当する。奇数番目は詳しい (detail) 成分を表すので $d(t)$ とかく。詳しいとは細かいことだから, 高域通過成分に該当する。

$$c(t) = x(2t) \quad (6\cdot53)$$

$$d(t) = x(2t + 1) \quad (6\cdot54)$$

これは、 $A(z)$ も $P(z)$ も 1 タップの 1/1 変換とでもよぶべき最も簡素な変換である。

以下の計算式 (← で記述される式) は代入文を表す。第 1 行目がリフティングの計算式である。第 2 行目 (= や ≈ に続く式) は理解の助けとなるように、入力信号 $x(t)$ をつかって解釈した式である。なお、floor 関数 $\lfloor \cdot \rfloor$ にときどき現れる $+\frac{1}{2}$ は丸めのためであり、省略しても大差ない。

本節で紹介するものは、特記しない限り、いずれの変換も低域通過成分の直流利得 (dc gain) は 1 である。定常応答としては直流利得が 1 だが、過渡応答としては振幅が大きくなることもある。8 ビット固定小数演算でも、振幅が 255 を超えることもある。

これに対して、高域通過成分 $d(t)$ のビット長は変換 1 段当たり 1 ビット増加する可能性がある。ただ、通常、ウェーブレット変換では高域通過成分はそれぞれのサブバンド分解に際して 1 回だけしか計算されないので、入力信号よりも 1 ビットだけ余分にビット長を確保しておけば定常応答出力のオーバーフローは回避できる。過渡応答としてはこの限りでない。たとえば、JPEG2000 では 2 ビットのガードビットを設定している。

(2) 1/2 変換

$$d(t) \leftarrow d(t) - c(t) \quad (6\cdot55)$$

$$= x(2t + 1) - x(2t) \quad (6\cdot56)$$

(3) 1/3 変換

$$d(t) \leftarrow d(t) - \left\lfloor \frac{c(t) + c(t+1)}{2} \right\rfloor \quad (6\cdot57)$$

$$= x(2t + 1) - \left\lfloor \frac{x(2t) + x(2t+2)}{2} \right\rfloor \quad (6\cdot58)$$

(4) 2/2 変換 (別称 Haar 変換)

$$d(t) \leftarrow d(t) - c(t) \quad (6\cdot59)$$

$$= x(2t + 1) - x(2t) \quad (6\cdot60)$$

$$c(t) \leftarrow c(t) + \left\lfloor \frac{1}{2} d(t) \right\rfloor \quad (6\cdot61)$$

$$= x(2t) + \left\lfloor \frac{x(2t+1) - x(2t)}{2} \right\rfloor \approx \frac{x(2t) + x(2t+1)}{2} \quad (6\cdot62)$$

(5) 2/6 変換 (別称 S+P 変換¹¹⁾)

$$d(t) \leftarrow d(t) - c(t) \tag{6.63}$$

$$= x(2t + 1) - x(2t) \tag{6.64}$$

$$c(t) \leftarrow c(t) + \lfloor \frac{d(t)}{2} \rfloor \tag{6.65}$$

$$= x(2t) + \lfloor \frac{x(2t + 1) - x(2t)}{2} \rfloor \approx \frac{x(2t) + x(2t + 1)}{2} \tag{6.66}$$

$$d(t) \leftarrow d(t + 1) - \lfloor \frac{c(t) - c(t + 2)}{4} + \frac{1}{2} \rfloor \tag{6.67}$$

$$\approx x(2t + 3) - x(2t + 2) - \frac{x(2t) + x(2t + 1)}{8} + \frac{x(2t + 4) + x(2t + 5)}{8} \tag{6.68}$$

文献 11) では S+P 変換と称して

$$c(t) \leftarrow \lfloor \frac{x(2t) + x(2t + 1)}{2} \rfloor \tag{6.69}$$

$$d(t) \leftarrow \lfloor \frac{-c(t) + 4x(2t + 2) - 4x(2t + 3) + c(t + 2)}{4} \rfloor \tag{6.70}$$

を与えている。これはリフティング算法では、

$$d(t) \leftarrow d(t) \tag{6.71}$$

$$d(t) \leftarrow d(t) + c(t) \tag{6.72}$$

$$c(t) \leftarrow c(t) - \lfloor \frac{d(t)}{2} \rfloor \tag{6.73}$$

$$d(t) \leftarrow d(t + 1) - \lfloor \frac{c(t) - c(t + 2)}{4} + \frac{1}{2} \rfloor \tag{6.74}$$

と計算することができる。それぞれのウェーブレットフィルタのインパルス応答は

- 素直なりフティング形式では $\{-1, -1, -8, 8, 1, 1\}$
- S+P 形式では $\{-1, -1, 8, -8, 1, 1\}$

である。S+P 形式のほうがインパルス応答に小さな減衰振動を含むので、周波数特性における遮断特性が急峻であり、画像圧縮符号化などに適している。

(6) 5/3 変換 (別称 5/3-SSKF,¹²⁾ CDF(2,2))

JPEG2000/Lossless など、可逆符号化でよく使われる。

$$d(t) \leftarrow d(t) - \lfloor \frac{c(t) + c(t + 1)}{2} \rfloor \tag{6.75}$$

$$\approx \frac{-x(2t) + 2x(2t + 1) - x(2t + 2)}{2} \tag{6.76}$$

$$c(t) \leftarrow c(t + 1) + \lfloor \frac{d(t) + d(t + 1)}{4} + \frac{1}{2} \rfloor \tag{6.77}$$

$$\approx \frac{-x(2t) + 2x(2t + 1) + 6x(2t + 2) + 2x(2t + 3) - x(2t + 4)}{8} \tag{6.78}$$

(7) 5/11 変換¹³⁾

5/3 変換に予測ステップを追加したもので、レギュラリティは (2,2) である。

$$d(t) \leftarrow d(t) - \lfloor \frac{c(t) + c(t+1)}{2} \rfloor \tag{6\cdot79}$$

$$\simeq \frac{-x(2t) + 2x(2t+1) - x(2t+2)}{2} \tag{6\cdot80}$$

$$c(t) \leftarrow c(t+1) + \lfloor \frac{d(t) + d(t+1)}{4} + \frac{1}{2} \rfloor \tag{6\cdot81}$$

$$\simeq \frac{-x(2t) + 2x(2t+1) + 6x(2t+2) + 2x(2t+3) - x(2t+4)}{8} \tag{6\cdot82}$$

$$d(t) \leftarrow d(t) + \lfloor \frac{c(t-2) - c(t-1) - c(t) + c(t+1)}{32} + \frac{1}{2} \rfloor \tag{6\cdot83}$$

$$\simeq \frac{-x(2t-4) + 2x(2t-3) + 7x(2t-2) - 136x(2t)}{256} + \frac{256x(2t+1) - 136x(2t+2) + 7x(2t+4) + 2x(2t+5) - x(2t+6)}{256} \tag{6\cdot84}$$

ほかに Calderbank, Daubechies, and Sweldens¹⁰⁾によるレギュラリティ (4, 2) の 5/11 変換もあるので混同に注意。第 2 予測段の除数 32 を 16 に替えれば、これになる。

(8) 9/7 変換

変換利得 (transform gain) は 5/3 変換に比べて高い¹⁴⁾。レギュラリティは (4, 2) である。

$$d(t) \leftarrow d(t) - \lfloor \frac{-c(t-1) + 9c(t) + 9c(t+1) - c(t+2)}{16} + \frac{1}{2} \rfloor \tag{6\cdot85}$$

$$\simeq \frac{x(2t-2) - 9x(2t) + 16x(2t+1) - 9x(2t+2) + x(2t+4)}{16} \tag{6\cdot86}$$

$$c(t) \leftarrow c(t) + \lfloor \frac{d(t-1) + d(t)}{4} + \frac{1}{2} \rfloor \tag{6\cdot87}$$

$$\simeq \frac{x(2t-4) - 8x(2t-2) + 16x(2t-1)}{64} + \frac{46x(2t) + 16x(2t+1) - 8x(2t+2) + x(2t+4)}{64} \tag{6\cdot88}$$

時間インデックスをふつうの表記にすると，

$$c(t) = x(2t) \tag{6\cdot89}$$

$$d(t) = x(2t - 1) \tag{6\cdot90}$$

$$d(t) \leftarrow d(t) - \left[\frac{-c(t+1) + 9c(t) + 9c(t-1) - c(t-2)}{16} + \frac{1}{2} \right] \tag{6\cdot91}$$

$$\approx \frac{x(2t+2) - 9x(2t) + 16x(2t-1) - 9x(2t-2) + x(2t-4)}{16} \tag{6\cdot92}$$

$$c(t) \leftarrow c(t) + \left[\frac{d(t+1) + d(t)}{4} + \frac{1}{2} \right] \tag{6\cdot93}$$

$$\approx \frac{x(2t+4) - 8x(2t+2) + 16x(2t+1)}{64} + \frac{46x(2t) + 16x(2t-1) - 8x(2t-2) + x(2t-4)}{64} \tag{6\cdot94}$$

(9) リフティングの形式

順番に計算式を追いかけてきた読者は気づいたことであろう。

- 予測ステップはエレベータの下りで，

$$d(t) \leftarrow \{d(t), \text{またはその純粋遅延}\} - \{c(t-\ell) \text{ たちの加重平均}\}$$
- 更新ステップはエレベータの上りで，

$$c(t) \leftarrow \{c(t), \text{またはその純粋遅延}\} + \{d(t-\ell) \text{ たちの加重平均}\}$$

という形式である。純粋遅延は最も簡単な全域通過関数であり，インパルス応答波形に対称性を与えて，線形位相フィルタになるように調整する。

実は，リフティング(昇降法)の昇降ステップの予測フィルタと更新フィルタをどんな線形位相の低域通過フィルタにしても，可逆変換となる。自分だけのオリジナル版「マイ・ウェーブレット」を簡単に作ることができる。これが Sweldens の与えたリフティング⁹⁾であり，時間領域で記述される。なお，周波数領域におけるリフティングでは式(6.22)のように， $S(z)$ として対称な偶数長 FIR フィルタを任意に選んで適用すればよい。

また，リフティングの代入文はすべて，入力データのどれかに計算結果を上書きする形である。したがって，リフティングの計算は in-place (ちょうどその場所)で行なわれ，余分の一時記憶メモリを必要としない。リフティング算法の特徴は可逆とインプレイス(省資源)，そしてローパワー(低消費電力=低計算量=高速)である。

(10) 4/4 変換 (別称 CDF(3,1))

上り，下りが逆の場合もある。このとき，分析側における直流利得と交流利得(最高周波数における利得)はそれぞれ次のとおりである。

$$\sum_k a_k = A(1) = \frac{2}{3} \tag{6\cdot95}$$

$$\sum_k b_k = B(-1) = -3 \tag{6\cdot96}$$

ただし， a_k, b_k はリフティング算法によって形成される分析側 lowpass filter と highpass filter ，

$A(z)$ と $B(z)$, のインパルス応答を表す.

$$c(t) \leftarrow c(t) - \lfloor \frac{d(t)}{3} \rfloor \quad (6\cdot97)$$

$$\simeq x(2t) - \frac{x(2t+1)}{3} \quad (6\cdot98)$$

$$d(t) \leftarrow d(t) - \lfloor \frac{3c(t) - 9c(t+1)}{8} \rfloor \quad (6\cdot99)$$

$$\simeq x(2t+1) - \frac{3x(2t) - x(2t+1) - 9x(2t+2) + 3x(2t+3)}{8} \quad (6\cdot100)$$

$$= \frac{-3x(2t) + 9x(2t+1) - 9x(2t+2) + 3x(2t+3)}{8} \quad (6\cdot101)$$

$$c(t) \leftarrow c(t+1) + \lfloor \frac{4}{9}d(t) \rfloor \quad (6\cdot102)$$

$$\simeq \frac{-x(2t) + 3x(2t+1) + 3x(2t+2) - x(2t+3)}{6} \quad (6\cdot103)$$

(11) m/n 変換という表記法

m が $A(z)$ の長さ, n が $P(z)$ の長さを表す. だから, $5/3$ 変換と $3/5$ 変換は異なる.

(12) CDF(m, n) という分類法

$$A(z) = \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^m A'(z), \quad (6\cdot104)$$

$$P(z) = \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^n P'(z) \quad (6\cdot105)$$

の形式であることを示す. ウェーブレットではレギュラリティと称して, $z = -1$ に存在する零点が重要である. Admissibility とは, ウェーブレットであるための資格をいう. ウェーブレットであるためには, $A(z)$, $P(z)$ が $z = -1$ に少なくとも一つ零点をもつことが必要であり, 完全再構成だけではウェーブレットとはいえない.

ウェーブレット誕生の直前, 1989 年に LOT (lapped orthogonal transforms) というブロックの境界部をオーバーラップさせて変換する技法が登場した. DCT におけるブロック歪みに対する対抗馬として考案された. しかし, QMF*と同様に, 見た目はウェーブレットと類似しているが, $z = -1$ に零点があるか否かという点が決定的に異なる. これが量子化したときにチェス盤歪み (checker-board artifact) が出るか否か, という決定的な相違を作り出す.

(13) 2次元変換

画像データに対しては, 図 6.3 のように, 始めに水平方向にフィルタをかけ, その次に垂直方向にフィルタをかける. したがって, 四つのサブバンド LL, HL, LH, HH に分割される.

(14) 離散と連続

ウェーブレットには離散ウェーブレットと連続ウェーブレットがある. ガボールウェーブ

* quadrature-mirror filter bank, 4 分割鏡映対称フィルタバンク. 複素平面上的単位円を 4 等分すると, 周波数の正負, 周波数帯の高低という観点から, 信号成分を 4 分割することができる. この四つの間に鏡映対称性があることから, こういふ名称になった.

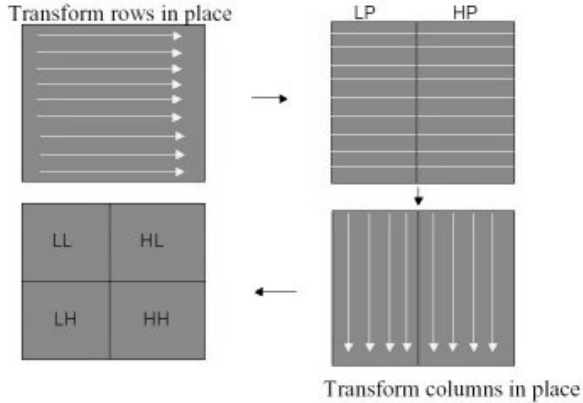


図 6.3 2次元のウェーブレット変換

レット⁸⁾は正弦波をガウス関数で振幅変調した形式であり、連続ウェーブレットの代表である。信号解析以外で連続ウェーブレットを使用することはまれである。

(15) 直交系，双直交系，及び過剰系

直交性と線形位相特性を満足するウェーブレットは Haar ウェーブレットのほかには存在しない。自明でない直交ウェーブレットはドプシスによって与えられた⁷⁾。量子化をとまなう符号化では線形位相性を重視するため、双直交ウェーブレットが賞用される。

ガボールウェーブレットは非直交ウェーブレットであり、過剰系に分類される。また、離散直交ウェーブレット変換や離散双直交ウェーブレット変換では、変換後のデータ総数が入力データ総数と同一となるように計算される。いわば、変換結果の間引きが実効的に行なわれる。リフティング算法では 1/1 変換がこの間引きに該当する。間引きをしなければ、離散ウェーブレットにおいても過剰系によるウェーブレット変換となる。過剰系による変換ではデータ総数が増加するのでデータ圧縮には直接的な利益がないが、線形位相フィルタバンクでは変換後のデータに並進不変性が維持されるため、データ照合などが可能になる。また、心電図波形や地震波形の分析・圧縮ではイベントの発生が疎（スパース）であり、圧縮も可能なことが多い¹⁵⁾。過剰系は超解像やカラーデモゼイシングなど、データ補間における要素技法としても使用される^{16, 17)}。

参考文献

- 1) D. Esteban and C. Galand, "Application of quadrature mirror filters to split-band voice coding schemes," Proc. IEEE ISCAS 1977, vol.2, pp.191-195, 1977.
- 2) M.J.T. Smith and T.P. Barnwell, "Exact reconstruction techniques for tree-structured subband coders," IEEE Trans. ASSP, vol.34, pp.434-441, 1986.
- 3) M. Vetterli, "Filter banks allowing perfect reconstruction," Signal Proc., vol.10, pp.219-244, 1986.
- 4) P.P. Vaidyanathan, "Theory and design of M -channel maximally decimated quadrature mirror filters with arbitrary M , having the perfect reconstruction property," IEEE Trans. ASSP, vol.35, pp.476-492, 1987.
- 5) G. Strang and T.Q. Nguyen, Wavelets and Filter Banks, Wellesley-Cambridge Press, MA, 1997.

- 6) H. Kiya, M. Yae, and M. Iwahashi, "A linear-phase two-channel filter bank allowing perfect reconstruction," Proc. IEEE ISCAS, pp.951-954, 1992.
- 7) I. Daubechies, "Orthonormal bases of compactly supported wavelets," Comm. Pure Appl. Math., vol.41, pp.909-996, 1988.
- 8) I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, SIAM, 1992.
- 9) W. Sweldens, "The lifting scheme: A new philosophy in biorthogonal wavelet constructions," Proc. SPIE, vol.2569, pp.68-79, 1995.
- 10) A. Calderbank, I. Daubechies, W. Sweldens, and B.L. Yeo, "Lossless image compression using integer to integer wavelet transforms," Proc. IEEE Int. Conf. on Image Proc., Washington, DC, USA, vol.1 of 3, pp.596-599, 1997.
- 11) A. Said and W.A. Pearlman, "An image multiresolution representation for lossless and lossy compression," IEEE Trans. Image Proc., vol.5, pp.1303-1310, 1996.
- 12) D. Le Gall and A. Tabatabai, "Sub-band coding of digital images using symmetric short kernel filters and arithmetic coding techniques," Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Proc., New York, vol.2, pp.761-764, 1988.
- 13) M.D. Adams and F. Kossentini, "Reversible integer-to-integer wavelet transforms for image compression: performance evaluation," IEEE Trans. Image Proc., vol.9, no.6, pp.1010-1024, 2000.
- 14) K. Shinoda, H. Kikuchi, and S. Muramatsu, "Lossless-by-lossy coding for scalable lossless image compression," IEICE Trans. Fundamentals, vol.E91-A, no.11, pp.3356-3364, 2008.
- 15) 中静, 菊池, 申, 牧野, "多重解像度ピーク解析による ECG データ圧縮," 信学誌, vol.J79-D-II, no.8, pp.1412-1421, 1996.
- 16) 小松, 齊藤, "Total-Variation 正則化を用いたシャープニング・デモザイキング法," 映情学誌, vol.41, no.11, pp.1621-1632, 2007.
- 17) T. Saito, N. Fujii, and T. Komatsu, "Iterative soft color-shrinkage for color-image denoising," Proc. IEEE ICIP 2009, Cairo, 2009.