

## 1群(信号・システム) - 9編(デジタル信号処理)

## 4章 非線形信号処理

(執筆者：棟安実治)[2011年2月受領]

**概要**

非線形信号処理の分野は、非常に幅広い内容を有しているため定義することが難しい。線形信号処理と考えられている内容でも、厳密に考えると非線形と見なした方がよい部分もある。しかし、ある程度狭義な意味で考えた場合、本章で紹介する順序統計フィルタ、スタックフィルタ、 $\varepsilon$ フィルタ、マセマティカル・モルフォロジ、ポルテラフィルタといった内容が基本的であると考えられる。応用としては、非線形な性質の強い画像への応用が多いが、スピーカの非線形特性の補正などへの応用も提案され、CPUの計算性能の向上とともに幅広い分野に応用されるようになってきている。また非線形信号処理の分野はファジィ、ニューラルネットワーク、Genetic Algorithm (GA) といった分野とも親和性が高く、知的信号処理の基礎となっている。

**【本章の構成】**

本章では、まず順序統計に基づくフィルタ群(メディアンフィルタ、順序統計フィルタ)について4-1節で述べ、順序統計に基づくフィルタ群を含みながらより幅広いクラスを定義可能なスタックフィルタを4-2節で説明する。4-3節では、簡単な非線形特性の導入により線形フィルタと順序統計フィルタの長所をあわせもつ $\varepsilon$ フィルタについて述べる。4-4節では、信号の形状に注目した手法であるマセマティカル・モルフォロジを紹介する。最後に、級数展開を理論的背景にもつポルテラフィルタについて述べる。

## 1群-9編-4章

## 4-1 順序統計に基づくフィルタ

(執筆: 棟安実治) [2009年2月受領]

## 4-1-1 メジアンフィルタとその拡張

## (1) メジアンフィルタとその性質

順序統計に基づく処理は、信号値の大きさの順序に着目した処理手法<sup>1,2,3)</sup>である。メジアンフィルタは、それを雑音除去に適用した例としてよく知られている。その特長として、インパルス性雑音の除去性能とエッジ信号の保存性があげられる。一般の線形フィルタでこれらの信号を処理すれば、インパルス性雑音を完全に除去することはできず、エッジもぼけてしまう。一方、ガウス性雑音に対しては平均値フィルタと比較した場合、若干性能が落ちることが示されているが、かなりの程度除去することが可能であり、画像処理などでは欠くことのできないフィルタである。

メジアンフィルタは、1次元信号  $\{x(i)\}$  に対して

$$y(i) = MED\{x(i-M), \dots, x(i), \dots, x(i+M)\} \quad (4\cdot1)$$

と定義される。ここで、 $MED$  は中央値を求める演算を示し、 $M$  はフィルタ窓の大きさを示す。2次元信号  $\{x(i, j)\}$  に対しては、

$$y(i, j) = MED\{x(i+k, j+l); (k, l) \in A\} \quad (4\cdot2)$$

と表せる。ここで、 $A$  はフィルタ窓を表す。1次元信号の場合、窓の大きさ  $M$  が除去できるインパルス性雑音の幅ないしは保存可能なエッジ信号の長さを決めることになる。また2次元信号の場合、窓の大きさだけでなく形状によっても処理結果が異なる点に注意が必要である。一般にフィルタ窓に含まれる画素数が多いほど雑音除去能力に優れ、少ないほど原信号保存性に優れているといえる。従って、雑音が少ないときには窓を小さく、多いときには大きくとることが望ましいが、最適な窓サイズを決めることは難しい。

このフィルタを信号推定の観点から考えると、以下の目的関数を最小にする  $t$  を求めることに等しい。

$$s(t) = \sum_{k=-M}^M |x(i+k) - t| \quad (4\cdot3)$$

この関数は凸関数であり、端点は入力信号値となる。これより、メジアンフィルタの定義からは自明であるが、出力値は入力信号値のいずれかになる。

メジアンフィルタの解析手法としては、このほかに統計的な解析手法や決定論的な解析手法が知られている<sup>1,3)</sup>。前者は入力信号を確率信号としたときの性質の解析であり、入力信号の分布と処理性能の関連が明らかにされている。後者は、メジアン処理によって不変となる信号に着目した解析であり、フィルタ窓幅とそれによって除去可能なインパルス性雑音の幅などの関係が考察されている。

## (2) 荷重メジアンフィルタ

メジアンフィルタは、信号の大きさのみを考慮するので、微小な信号変化を無視することが多い。そのため、テキストチャなどをつぶしてしまい、塊状領域の形成がしばしば見られる。この問題を解決するために、信号の位置についても考慮した荷重メジアンフィルタが提案されている。入力信号を  $\{x(i)\}$ 、フィルタ窓の大きさを  $2M + 1$ 、荷重を  $\{w(i)\}$  としたとき、荷重メジアンフィルタは、

$$y(i) = MED[w(-M) \diamond x(i - M), \dots, w(0) \diamond x(0), \dots, w(M) \diamond x(i + M)] \quad (4.4)$$

と与えられる。また、 $w \diamond x$  は

$$w \diamond x = \underbrace{x, \dots, x}_{w \text{ times}}$$

と、信号を  $w$  個多重させる操作を示している。信号の位置に対応した荷重に応じて信号を多重化することにより、大きい荷重をもつ信号ほど選ばれやすくなる。例えば、窓幅  $2M + 1$  に対して、ある信号に対する荷重を  $M + 1$ 、そのほかを  $1$  とすると必ず  $M + 1$  の荷重をもつ信号が選ばれる。

荷重を正の実数に拡張することも可能であり、その場合のアルゴリズムは下記ようになる。

1. フィルタ窓内のデータを大きさ順に並べ替える。
2. 大きなデータに対応した荷重から順に加えていく。
3. 荷重の和が  $\sum_{i=1}^{2k+1} w_{(i)}/2$  をはじめて越えた荷重に対応するデータ値が荷重メジアンフィルタ出力である。ここで、 $w_{(i)}$  はフィルタ窓内において  $i$  番目に大きな信号値に対応する荷重とする。

この場合、フィルタ荷重の効果は荷重間の比によって決定されることになる。

## (3) スイッチングメジアンフィルタ

インパルス性雑音には孤立性という特徴がある。すなわち、雑音で劣化している画素と劣化していない画素が存在していることを意味する。しかしメジアンフィルタで処理を行う場合、すべての画素に対して一様に処理を行うことになる。メジアンフィルタはエッジ保存性を有するフィルタであるが、それでも信号の劣化を避けることはできない。この問題に対応するために、スイッチングメジアンフィルタという枠組みが提案されている。

スイッチングメジアンフィルタは次の二つのステップからなる。

1. 雑音検出を行い、雑音位置画像を生成する。
2. 雑音位置画像を用いて、検出した雑音にのみフィルタ処理を行う。

処理としては、単に雑音検出と処理を分離しただけだが、非劣化画素に対して処理を行わないことによる効果は非常に大きい。このフィルタにおいて、重要な点はまず雑音検出をどの

ように行うかである。基本的な方法としては、メジアンフィルタで処理を行い、その結果と劣化画像との差分絶対値を計算することで、その値があるしきい値以上の点を劣化画素として検出する方法がある。この方法では、雑音や画像の性質によってしきい値の値が変化するので、最適値を決定するのが難しい。このため、サポートベクターマシンの利用を含む様々な方法が提案されている。

次にフィルタ処理においても、最も単純な方法は雑音点だけメジアンフィルタで処理することであるが、劣化画素を処理点の推定から除外したり、複数のフィルタ窓を用いて推定を行ったりと、これも様々な手法が提案されている。いずれにしても、メジアンフィルタの拡張として重要な枠組みであることは間違いない。

#### 4-1-2 順序統計フィルタ

メジアンフィルタは順序統計フィルタの一つであるが、このほかにも様々な順序統計に基づくフィルタが提案されている。例えば、ランクオーダーフィルタ、トリムド平均値フィルタ、 $M$  推定に基づくフィルタ、 $L$  フィルタなどである。ここでは、この中から比較的良好に参考されるフィルタであるランクオーダーフィルタ、 $\alpha$ -トリムド平均値フィルタ、DW-MTM フィルタについて説明する。そのほかのフィルタについては参考文献 1, 2, 3) を参照されたい。

##### (1) ランクオーダーフィルタ

ランクオーダーフィルタはフィルタ窓内の  $r$  番目に小さなデータを出力するフィルタであり、その出力は

$$y(i) = r - \text{th smallest value of } [x(i-M), \dots, x(i), \dots, x(i+M)] = x_{(r)}(i) \quad (4-5)$$

と定義される。 $r = 1$  の時が最小値フィルタ、 $r = N$  の時が最大値フィルタ、そして、 $r = M + 1$  の時がメジアンフィルタに対応する。インパルス性雑音の発生率が高くなったときは、 $r$  を変えることにより、より雑音除去能力を向上させることができる。信号値の低いインパルス性雑音の発生率が高い場合には  $r$  を増やし、逆に高いインパルス性雑音の場合には  $r$  を減らせばよい。また最小値フィルタ及び最大値フィルタは順序統計フィルタを構成する基本的フィルタとして重要な非線形フィルタとして考えられる。

##### (2) $\alpha$ -トリムド平均値フィルタ

雑音として、インパルス性雑音だけでなくガウス性雑音が重畳していることも多い。そのため、両方の雑音を一度に除去可能なフィルタがいくつか提案されている。 $\alpha$ -トリムド平均値フィルタはそのようなフィルタの一つである。ガウス性雑音には平均値フィルタが統計的な意味で最適であることが知られているので、順序統計量を用いたインパルス性雑音の除去と画素値の平均化によるガウス性雑音の除去の枠組みを兼ね備えている。

$\alpha$ -トリムド平均値フィルタの出力は、以下のように定義される。

$$y(i) = \frac{1}{N(1-2\alpha)} \sum_{k=\alpha N+1}^{N-\alpha N} x_{(k)}(i) \quad (4-6)$$

ここで、 $0 \leq \alpha \leq (N-1)/2N$  であり、 $\alpha N$  の値は整数値とする。このフィルタは、フィルタ窓内の信号値を大きさの順に並べ、両端に位置するものを  $\alpha N$  個除去し、残りの信号値の

平均を求めるという操作を行う．インパルス性雑音は，その性質から両端に位置することが多いため，残りの信号値はガウス性雑音でのみ劣化した信号値であると考えられる．従って，これに平均操作を行うことでガウス性雑音除去が行える． $\alpha$  はインパルス性雑音の発生確率によって適切な値を選択する必要がある． $\alpha$ -トリムド平均値フィルタの欠点として，フィルタ窓内にエッジ信号を含む場合，平均操作を行うことでそのエッジをぼかしてしまう点があげられる．

### (3) DW-MTM フィルタ

インパルス性雑音とガウス性雑音を同時に除去可能なもう一つのフィルタとして，Double Window Modified Trimmed Mean (DW-MTM) フィルタがある．DW-MTM フィルタの出力は，以下のように定義される．

$$y(i) = \frac{\sum_{k=1}^N b_k x_{(k)}(i)}{\sum_{k=1}^N b_k} \quad (4\cdot7)$$

$$b_k = \begin{cases} 1 & : |x_{(k)}(i) - y_{med}(i)| \leq q \\ 0 & : \text{その他} \end{cases} \quad (4\cdot8)$$

ここで， $y_{med}(i)$  は処理点を中心とするフィルタ窓幅  $N$  より小さい窓内データのメジアン値を意味する．

このフィルタは雑音を除去するための窓と信号劣化を抑えるための窓の二つをもっている．一般に，できるだけ窓を広げたほうが雑音除去の面からは有利である．特にガウス性雑音の除去能力が高まる．一方，信号劣化するなわちエッジや細部保存の観点からは，窓を広げるとは処理点と関係の薄い画素が含まれることを意味するので，窓が小さいことが望ましい．このため DW-MTM フィルタでは，信号値推定にその画素値を含むか否かを決定するメジアン値の窓を小さくしている．

DW-MTM フィルタの演算は次のように行われる．まず幅を狭めた窓内のメジアン値を最初に決定し，更にあらかじめ決めておいた定数  $q$  を用いて区間  $[med(n) - q, med(n) + q]$  を定める．次に幅を広げた窓内で，この区間から外れるデータをすべて除外してその平均値を取って出力とする．つまり，DW-MTM フィルタは窓内のインパルス雑音のようなメジアン値と大きく異なる点を零に置き換えて，零でない点の平均をとる．これにより，DW-MTM フィルタはインパルス性雑音とガウス性雑音の両方を除去することができる．エッジ近辺の信号に対しても，処理点と大きさが異なる信号は設定された区間から外れることになるので，平均値の計算に影響を与えない．従って，メジアンフィルタ同様エッジ信号を保存することもできる．つまり，信号保存性と雑音除去能力に優れたフィルタであるということが出来る．

DW-MTM フィルタでは，二つの窓幅と  $q$  がパラメータになる．この値が処理性能を決定するので，十分注意が必要である．特に  $q$  については，この値を小さくとりすぎるとガウス性雑音の除去能力が落ち，逆に高くしすぎた場合にはインパルス性雑音の除去能力あるいは信号保存性に影響を与えるので，画像の性質に応じて慎重に決定することが必要である．

#### 参考文献

- 1) I. Pitas and A.N. Venetsanopoulos, "Nonlinear digital filters," Kluwer Academic Publishers, 1990.
- 2) J. Astola and P. Kousmanen, "Fundamentals of nonlinear digital filters," CRC Press, 1997.

- 3) 棟安実治, 田口亮, “非線形デジタル信号処理,” 朝倉書店, 1999.

1群-9編-4章

4-2 スタックフィルタ

(執筆者：田口 亮)[2009年2月受領]

4-2-1 スタックフィルタの定義

0 から  $M - 1$  の整数値で定義される  $M$  値の信号列  $x(i)$  を考える．この  $M$  値の信号  $x(i)$  を以下の操作で  $M - 1$  組の 2 値信号 ( $x^{(1)}(i), \dots, x^{(M-1)}(i)$ ) に分解する．この操作をしきい値分解と称する．

$$x^{(j)}(i) = \begin{cases} 1 & : \text{if } x(i) \geq j \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases} \quad (4\cdot9)$$

$M - 1$  組の 2 値信号列から元の信号  $x(i)$  は次式で定義される合成によって得られる．

$$x(i) = \sum_{m=1}^{M-1} x^{(m)}(i) \quad (4\cdot10)$$

次に，スタックフィルタの定義を行う．

スタックフィルタは，①入力信号のしきい値分解，②しきい値分解後の各レベルに対する正定ブール関数の入出力計算，③正定ブール関数出力の合成による出力信号の導出，の三つの過程からなる．フィルタの処理過程を図示したものが図 4-1 となる．

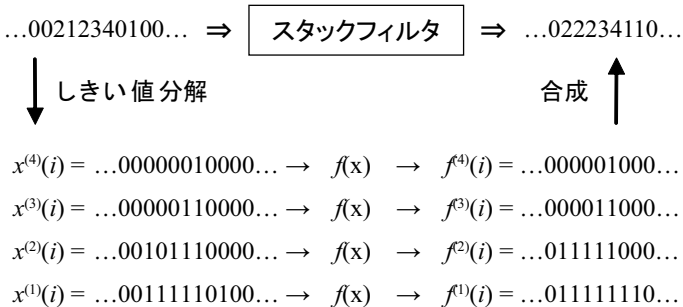


図 4-1 スタックフィルタ

①しきい値分解

式 (4-9) で定義された操作であり， $M$  値の信号が  $M - 1$  組の 2 値信号に変換される．

②正定ブール関数の入出力計算

しきい値分解で得られた 2 値信号に対してブール関数  $f(\cdot)$  の入出力計算を行う．

$$y^{(m)}(i) = f(x^{(m)}(i)) \quad (4\cdot11)$$

ここで，フィルタ窓幅を  $2k + 1$  とすれば，入力信号ベクトル  $\mathbf{x}^{(m)}(i)$  は

$$\mathbf{x}^{(m)}(i) = [x^{(m)}(i-k), \dots, x^{(m)}(i), \dots, x^{(m)}(i+k)] \quad (4 \cdot 12)$$

と与えられる。

### ③ ブール関数出力の合成

各レベルのブール関数出力  $y^{(m)}(i)$  を合成して出力信号  $y(i)$  を得る。

$$y(i) = \sum_{m=1}^{M-1} y^{(m)}(i) \quad (4 \cdot 13)$$

## 4-2-2 スタックフィルタの性質

二つの 2 値信号ベクトルを  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  とするとき、その大小関係を次式で定義する。

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \iff x_n \leq y_n \quad (\text{すべての } n \text{ に対して}) \quad (4 \cdot 14)$$

入力信号ベクトルに対するしきい値分解後の 2 値信号ベクトル群  $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(M-1)}$  に対して

$$\mathbf{x}^{(i)} \leq \mathbf{x}^{(j)} \quad i \geq j \text{ のとき} \quad (4 \cdot 15)$$

が成立する。すなわち、しきい値の上位レベルの信号が 1 で下位レベルの信号が 0 であることはない。

スタックフィルタにおける正定ブール関数出力に対しても次の式が成立する。

$$f(\mathbf{x}^{(i)}) \leq f(\mathbf{x}^{(j)}) \quad i \geq j \text{ のとき} \quad (4 \cdot 16)$$

ブール関数の出力信号においても、しきい値の上位のレベルが 1 となり下位のレベルが 0 となることはない。このことにより、出力信号をしきい値分解した結果は  $M-1$  組のブール関数出力と一致することになり、しきい値分解と合成との可逆性が保証される。

## 4-2-3 スタックフィルタによるメジアンフィルタの実現

4-1-1(1) で解説されている、最も一般的な非線形フィルタであるメジアンフィルタはスタックフィルタに包含されている。例えば、3 点メジアンフィルタをスタックフィルタで実現するには正定ブール関数  $f(\cdot)$  を

$$f(x^{(m)}(i-1), x^{(m)}(i), x^{(m)}(i+1)) = x^{(m)}(i-1) \cdot x^{(m)}(i) + x^{(m)}(i) \cdot x^{(m)}(i+1) + x^{(m)}(i+1) \cdot x^{(m)}(i-1) \quad (4 \cdot 17)$$

と与えればよい。

しきい値分解せずに  $M$  値の信号に対してメジアン値を求めようとする場合、



$$y(i) = \max[\min\{x(i-1), x(i)\}, \min\{x(i), x(i+1)\}, \min\{x(i+1), x(i-1)\}] \quad (4\cdot18)$$

のように  $\min$  演算と  $\max$  演算によって求めることができる。式 (4-17) と式 (4-18) を比較すれば、 $M$  値信号の  $\min$  演算と  $\max$  演算はしきい値分解後の 2 値信号に対する積及び和に対応することが分かる。

#### 4-2-4 スタックフィルタによる荷重メジアンフィルタの実現

4-1-1(2) で解説されている荷重メジアンフィルタもスタックフィルタとして実現できる。

ここでは、式 (4-4) で定義される荷重メジアンフィルタにおいて窓幅を  $2k+1$  とする。このとき、スタックフィルタにおけるプール関数を、

$$f(x^{(m)}(i)) = \begin{cases} 1 & : \sum_{j=-k}^k w(j) \cdot x^{(m)}(i-j) > \frac{1}{2} \sum_{j=-k}^k w(j) \\ 0 & : \text{その他} \end{cases} \quad (4\cdot19)$$

と定義すれば、式 (4-4) と同じ演算が実現される。

$M$  値信号の荷重メジアンフィルタにおける荷重は線形フィルタの荷重とは異なり、信号を多重化させる数を示したものである。一方、スタックフィルタにおいては、式 (4-19) から明らかなように、荷重メジアンフィルタの荷重も線形フィルタと同様、信号へ乗ずるものとなっている。すなわち、スタックフィルタにおいては、 $M$  値信号における並べ替えの操作が積和演算化される。順序統計に基づくフィルタの設計や実装に有利であることが示唆される。

#### 4-2-5 特定の構造を保存するスタックフィルタ

スタックフィルタの設計はプール関数の設計に帰着される。フィルタ窓幅が  $2k+1$  であれば、入力の 2 値信号のパターン数は  $2^{2k+1}$  であり、そのパターンに対して 0 か 1 の出力を対応づけるのがプール関数であり、その機能はルックアップテーブルである。一般的な設計法に関しては参考文献 1), 2) などを参照されたい。

ここでは、特定の構造を保存するスタックフィルタを紹介する。窓幅  $3 \times 3$  のフィルタを考え、窓内信号を次のように定義する。

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} \quad (4\cdot20)$$

このとき、画像の横のラインを保存するスタックフィルタのプール関数は

$$f(x_1^{(m)}, \dots, x_9^{(m)}) = (f_{MED}(x_1^{(m)}, \dots, x_9^{(m)}) + x_4^{(m)} \cdot x_5^{(m)} \cdot x_6^{(m)}) \cdot (x_4^{(m)} + x_5^{(m)} + x_6^{(m)}) \quad (4\cdot21)$$

と与えられる。ここで、 $f_{MED}(\cdot)$  はメジアンフィルタを実現するプール関数である。式 (4-21) のプール関数では  $x_4^{(m)} = x_5^{(m)} = x_6^{(m)} = 1$  の場合 (白の横ライン) は、 $f_{MED}(\cdot)$  の値にかかわらず出力は 1 に、 $x_4^{(m)} = x_5^{(m)} = x_6^{(m)} = 0$  の場合 (黒の横ライン) は、 $f_{MED}(\cdot)$  の値にかかわら

ず出力は0となり、横ラインが保存できることになる。スタックフィルタの中ではメジアンフィルタが最も雑音除去能力が高いため、メジアンフィルタのブール関数に横ライン保存の拘束を課すことにより、横ラインを保存する制約のもとで、雑音除去能力が最高のスタックフィルタが得られる。

縦と横のラインを共に保存できるスタックフィルタのブール関数は

$$f(x_1^{(m)}, \dots, x_9^{(m)}) = (f_{MED}(x_1^{(m)}, \dots, x_9^{(m)}) + x_3^{(m)} \cdot x_4^{(m)} \cdot x_5^{(m)} + x_2^{(m)} \cdot x_5^{(m)} \cdot x_8^{(m)}) \cdot (x_3^{(m)} + x_4^{(m)} + x_5^{(m)}) \cdot (x_2^{(m)} + x_5^{(m)} + x_8^{(m)}) \quad (4.22)$$

となる。式(4.21)に縦ライン保存を図る拘束項を加えることにより得られている。

同様な考え方で、構造物のコーナーを保存するスタックフィルタや縦、横、斜め(45°, 135°)ラインを保存するスタックフィルタなども容易に実現できる<sup>3)</sup>。

#### 参考文献

- 1) E.J. Coyle and L.H. Lin, "Stack filters and mean absolute error criterion," IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Process., vol.36, no.8, pp.1244-1254, 1988.
- 2) J.H. Lin, T.M. Sellke, and E.J. Coyle, "Adaptive stack filtering under the mean absolute error criterion," IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Process., vol.38, no.6, pp.938-954, 1990.
- 3) L. Yin, "Stack filter design: a structural approach," IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Process., vol.43, no.4, pp.831-840, 1995.

## 1群-9編-4章

4-3  $\varepsilon$  フィルタ

(執筆者: 荒川 薫)[2009年2月受領]

$\varepsilon$  フィルタは、突発的大振幅変化を含む信号に重畳した加法性の小振幅高周波雑音を除去する機能を有する非線形デジタルフィルタである<sup>1)</sup>。例えば、画像に小振幅ランダム雑音が付加した場合、突発的変化成分に相当する輪郭をばかすことなく雑音のみを除去することができ、エッジ保存フィルタの一つに相当する。ほかのエッジ保存フィルタと比較し、通常の線形デジタルフィルタで用いられる積和演算に簡単な非線形関数を組み入れることにより実現されるので、演算量が少なく、ハードウェアによる実装が容易であるという特徴を有する。

4-3-1  $\varepsilon$  フィルタの基本原則

一般に一次元の非再帰型線形低域通過デジタルフィルタは、 $x(n)$  を入力、 $y(n)$  を出力とすると、

$$y(n) = \sum_{k=-N}^N a_k x(n-k) \quad (4.23)$$

と表される。ただし、係数  $a_k$  は総和が1の低域通過フィルタ係数である。よって式(4.23)は、

$$y(n) = \sum_{k=-N}^N a_k \{x(n) + (x(n-k) - x(n))\} = x(n) + \sum_{k=-N}^N a_k (x(n-k) - x(n)) \quad (4.24)$$

と変形することができる。ここで、式(4.24)右辺の第2項に関数  $F(x)$  を導入すると、次式が与えられる。

$$y(n) = x(n) + \sum_{k=-N}^N a_k F(x(n-k) - x(n)) \quad (4.25)$$

関数  $F(x)$  が図4.2に示すような、

$$|F(x)| \leq \varepsilon : -\infty \leq x \leq \infty \quad (4.26)$$

を満たす非線形関数であるとする、次式より式(4.25)なるフィルタの入出力信号の差がある値  $\varepsilon'$  以下に制限される。

$$|y(n) - x(n)| = \left| \sum_{i=-N}^N a_i F(x(n+i) - x(n)) \right| \leq \sum_{i=-N}^N |a_i| \varepsilon \leq \varepsilon' \quad (4.27)$$

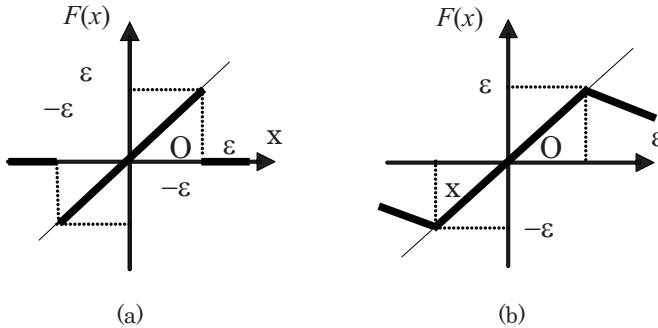


図 4.2 非線形関数  $F$  の例

この式 (4.25) で表されるフィルタを  $\varepsilon$  フィルタとよぶ。

ここで  $\varepsilon$  が  $x(n)$  の振幅に対して十分小さいとすると、出力  $y(n)$  は入力  $x(n)$  に近い値に制限されるので、 $\varepsilon$  フィルタは入力信号における突発的大振幅変化成分を出力に維持することができる。

さらに、式 (4.25) は次式のように表されるので、

$$y(n) = \sum_{k=-N}^N a_k(x(n) + F(x(n-k) - x(n))) \quad (4.28)$$

$\varepsilon$  フィルタは、 $x(n)$  と大いに異なる  $x(n-k)$  に対してはその値を  $x(n)$  (あるいは  $x(n)$  に近い値) に置き換えて、フィルタ係数  $a_k$  で表される線形低域通過フィルタで入力信号系列を処理することに相当する。従って、フィルタ窓内に大振幅突発的变化がある場合でも、それに影響されることなく低域通過フィルタを作用させるので、大振幅突発的成分を維持したまま小振幅高周波雑音を除去することができる。特に、 $|x(n-k) - x(n)|$  が  $\varepsilon$  以下となるような場合、例えば信号の平坦部において振幅が  $\pm\varepsilon/2$  以内である高周波雑音が付加された場合を、これを線形低域通過フィルタと同等に平滑することができる。 $\varepsilon$  が入力信号の振幅に対して十分大きな場合、 $\varepsilon$  フィルタはフィルタ係数  $a_k$  で表される非再帰型線形低域通過フィルタと同等になる。

$\varepsilon$  フィルタは次式のように、容易に二次元に拡張される。さらに高次元にも同様に拡張される。

$$y(i, j) = x(i, j) + \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N a_{k,l} F(x(i-k, j-l) - x(i, j)) \quad (4.29)$$

### 4-3-2 再帰型 $\varepsilon$ フィルタ

$\varepsilon$  フィルタは再帰型線形低域通過フィルタをもとにして構成することもできる。これを再

帰型  $\varepsilon$  フィルタとよぶ。再帰型  $\varepsilon$  フィルタの入出力関係式は以下ようになる。

$$y(n) = x(n-L) + \sum_{k=-N}^N a_k F(x(n-k) - x(n-L)) + \sum_{m=1}^M b_m F'(y(n-m) - x(n-L)) \quad (4\cdot30)$$

ここに、 $a_k, b_m$  は、再帰型線形低域通過フィルタ係数、 $F'$  は  $F$  と同様、図 4.2 なる非線形関数、 $L$  は  $a_k, b_m$  が表す再帰型線形低域通過フィルタの通過域における入出力間の時間遅れを表す。なお、再帰型の場合、位相特性が厳密には直線位相ではないので、通過域の位相特性を直線で近似して  $L$  を求める。また、フィードバック項に非線形関数を含むので、リミットサイクルを生じやすく、高次のフィルタを実現するのは難しい<sup>2)</sup>。

### 4-3-3 成分分離型 $\varepsilon$ フィルタ

本章 4-3-1 で述べたように、 $\varepsilon$ -フィルタは、信号の平坦部においては、振幅  $\varepsilon/2$  以下の雑音を除去することができるが、信号に傾斜成分が含まれる場合、同じ振幅の雑音が付加されても  $|x(n-k) - x(n)|$  が大きくなってしまい、そのような箇所では十分な雑音除去を行うことができない。また、信号に緩やかな凹凸成分が含まれる場合、凹凸の先端付近で、非線形関数による信号変形が生じ、それが出力信号に歪となって現れる。そこで、このような信号における傾斜成分や凹凸成分などの緩やかな変化成分の影響を排除するために、線形低域通過フィルタ、あるいは、 $\varepsilon$  の大きな  $\varepsilon$  フィルタにより、信号の滑らかな変化成分を抽出し、それを予め入力信号から差し引き、その残差成分に対して  $\varepsilon$  フィルタ処理を行い、その結果を先に差し引いた成分に加算し、出力信号を再構築することを考える。これにより、信号の滑らかな変化成分の影響を受けることなく振幅  $\varepsilon/2$  以下の小振幅高周波雑音を効果的に除去ことができ、さらに、出力信号の波形歪を抑制することができる。このようなフィルタを成分分離型  $\varepsilon$  フィルタとよぶ<sup>3)</sup>。図 4.3 は成分分離型  $\varepsilon$  フィルタの構成図である。この成分分離型フィルタでも、入出力の差はある有限値  $\varepsilon'$  以内に制限され、入力信号における突発的变化成分を出力に保持することができる。

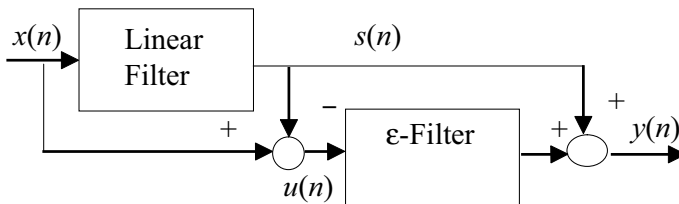


図 4.3 成分分離型  $\varepsilon$  フィルタ構成図

### 4-3-4 $\varepsilon$ フィルタの処理特性と有効性

図 4.4 に一次元テスト信号に対する  $\varepsilon$ -フィルタの処理例を示す。平均値フィルタで雑音除去を行うと、信号の突発的变化成分も損なわれるが、 $\varepsilon$ -フィルタでは、信号の突発的变化成

分をシャープに保ちながら小振幅高周波雑音が除去されていることが分かる．なお，非線形関数は図4・4(a)を用いた．実際の信号に対しては，画像の雑音除去，DCT符号化を用いて圧縮された画像（JPEG，MPEG画像）のブロック歪，モスキート雑音などの圧縮歪の除去などで有効性が示されている．さらに，顔画像に適用することにより，顔の構成要素をぼかすことなく肌の皺，しみなどが除去され，美肌化が効果的に行われることが示されている<sup>4)</sup>．音声の雑音除去には， $\varepsilon$ フィルタの基本形では，信号の傾斜部における雑音除去に限界があるため効果が少ないが，成分分離型 $\varepsilon$ フィルタを用いることにより，聴覚上でも良好な雑音除去が行われることが示されている<sup>3)</sup>．そのほか，突発的変化成分を含む生体信号，各種計測信号の小振幅雑音除去に有効である．

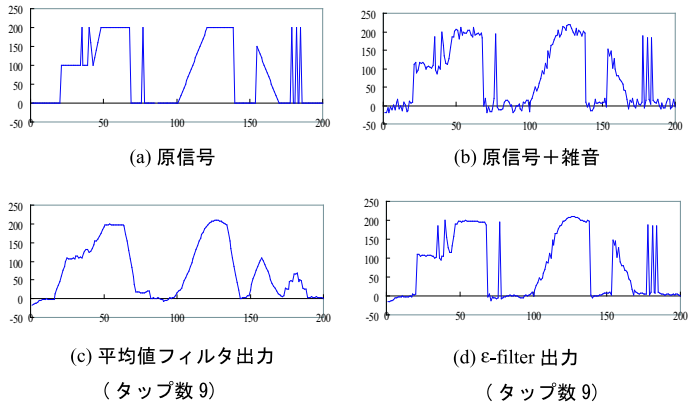


図4・4  $\varepsilon$ フィルタによる信号処理例

#### 参考文献

- 1) 原島博, 小田島薫, 鹿喰善明, 宮川洋, “ $\varepsilon$ -分離型非線形デジタルフィルタとその応用,” 信学誌, vol.J65-A, no.4, pp.297-304, 1982.
- 2) 荒川薫, 原島博, 宮川洋, “再帰型  $\varepsilon$ -非線形デジタルフィルタ,” 信学誌, vol.J66-A, no.10, pp.947-954, 1983.
- 3) 荒川薫, 松浦浩平, 渡部宏明, 荒川泰彦, “成分分離型  $\varepsilon$ -フィルタを用いた音声の雑音低減法,” 信学誌, vol.J85-A, no.10, pp.1059-1069, 2002.
- 4) H. Watabe, K. Arakawa, and Y. Arakawa, “Nonlinear Filters for Multimedia Applications,” IEEE Proc. ICIP'99, vol.3, pp.174-178, 1999.

## 1群-9編-4章

## 4-4 マセマティカル・モルフォロジ

(執筆者：浅野 晃)[2009年2月受領]

マセマティカル・モルフォロジ (mathematical morphology, 以下モルフォロジ) は、画像中に存在する物体 (object) の形と大きさを定量的に取り扱う画像演算を、集合演算を基盤として体系づけるものである。モルフォロジは、鉱石に分布する鉱物の幾何学的特性を評価するための画像処理手法に起源をもち<sup>1)</sup>、その底流には、「画像には『構造』があり、構造によって説明ができる」という思想がある。本節では、モルフォロジの基本演算の構成と、モルフォロジに基づく重要な概念であるサイズ分布とフィルタ定理について、簡単に述べる<sup>2,3,4,5)</sup>。

## 4-4-1 基本演算

モルフォロジの基本となる演算は“opening”である。モルフォロジは画像中の「物体の形と大きさ」を扱う手法であるから、2値画像を扱う手法が基本になっている。そこで、まず2値画像の場合を説明する。モルフォロジでは、2値画像中にある物体を、物体を構成する点 (通常、輝度が白、あるいは値が1) を表すベクトルの集合で表す。通常の離散的な画像の場合は、2値画像は「白画素の座標」の集合で表されるということになる。さらに、この画像への作用を表す別の画像を考え、これを構造要素 (structuring element) とよぶ。構造要素は、画像フィルタでいうウィンドウに相当する。

処理される画像を集合  $X$ 、構造要素を  $B$  で表す。  $X$  の  $B$  による opening  $X_B$  は、

$$X_B = \{B_z \mid B_z \subseteq X, z \in \mathbb{Z}^2\} \quad (4.31)$$

という性質をもつ。ここで、 $B_z$  は  $B$  を  $z$  だけ移動したものの (translation) で

$$B_z = \{b + z \mid b \in B\} \quad (4.32)$$

である。 $X$  の  $B$  による opening は「 $X$  からはみださないように、 $B$  を  $X$  の内部でくまなく動かしたときの、 $B$  そのものの軌跡」であり、「画像中の物体  $X$  から、構造要素  $B$  が収まりきらないくらい小さな部分だけを除去して、他はそのまま保存する」という作用を表している。構造要素としてある典型的形状を選ぶとすれば、opening によって保存される部分は、その形状によって表される構造をもち、除去される部分は、その構造を持たない部分とみなされる。すなわち、opening は、画像のもつ構造を表現するというモルフォロジの思想を、構造要素の形や大きさとの関係を用いて具体的に実現する演算である。

Opening は、さらに単純なピクセルごとの集合演算二つに分解して定義される。これらは、構造要素によって物体を削り取る“erosion”と、構造要素の分だけ物体を膨らませる“dilation”である。さらに、物体以外の背景に対して opening を行うことに相当する“closing”(openingの双対演算)の、合わせて四つの演算が、モルフォロジの基本演算とされる。図4.5に、erosion, dilation, opening, closingの効果を示す。

なお、多値(グレースケール)画像に対する演算を定義するには、画像中の位置を表す3次元の座標に、さらに画素値を表す1次元を加えた3次元空間を考える。この空間で、各画素をその画素値を高さとする柱で表すと、多値画像はこの空間内の立体となる。この立体(た

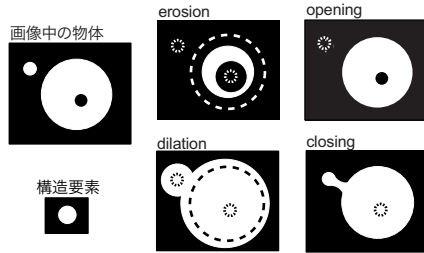


図 4-5 Erosion, dilation, opening, closing

だし、下方には  $-\infty$  に達するものとする)を陰影 (umbra) とよぶ。陰影に対して上記の集合演算を行うことで、多値画像の演算が定義できる。実際には、多値の erosion/dilation は下限・上限演算に帰着され、ファジィ論理における論理積・論理和と深い関連をもつ。

#### 4-4-2 granulometry とサイズ分布

サイズ分布とは、画像中の図形を構造要素の相似形に分解したとき、どのサイズの相似形がどれだけ面積を占めているか、すなわち、各相似形のサイズの分布を表したものである。  $B$  をある構造要素とし、  $B$  のサイズを拡大した  $2B, 3B, \dots$  を用意する。これらは、対象の図形  $X$  について  $X_B \supseteq X_{2B} \supseteq X_{3B} \supseteq \dots$  を満たすように定義されなければならない。任意の  $X$  についてこれをみたすには、  $(n+1)B_{nB} = (n+1)B$  であればよい<sup>1)</sup>。この関係を、「  $(n+1)B$  が  $nB$  に対して open である」という。通常は、  $2B, 3B, \dots$  は凸図形  $B$  の相似拡大で定義される。

そして、各々のサイズの構造要素で各々 opening を行い、  $X_B, X_{2B}, X_{3B}, \dots$  という図形の系列を作る。すると、この図形系列では、  $X_B$  は  $X$  から  $B$  よりも小さな成分が、  $X_{2B}$  は  $2B$  より小さな成分が、  $X_{3B}$  は  $3B$  より小さな成分が、  $\dots$ 、各々除かれていることになり、  $X$  から除かれる部分がだんだん大きくなって行く図形系列になっていることが分かる。このような図形の系列をつくる opening の系列を granulometry という。Granulometry によって生成される図形の系列  $X_B, X_{2B}, X_{3B}, \dots$  について、各図形の面積と元の図形  $X$  の面積との比を求める。サイズに面積比を対応させた関数は、サイズ 0 の時面積比 1 で、単調減少関数になる。これをサイズ分布関数 (size distribution function) という。サイズ分布関数のサイズ  $n$  に対応する値は、「画像中の物体のうち、サイズ  $n$  以上の部分の面積の割合」を表す。

さらに、離散的なサイズを考える場合、サイズ分布関数の差分は、  $X_B, X_{2B}, X_{3B}, \dots$  の中の、隣接するサイズに対応する画像間の面積の差に相当する。例えば、  $X_{2B}$  と  $X_{3B}$  の面積の差は、「  $X_{2B}$  による opening では除かれなかったが、  $X_{3B}$  による opening では除かれた部分」、すなわち「サイズがちょうど 2 である部分」の面積となる。このようにして、各サイズに対応する部分の面積を求めたものをパターンスペクトラム (pattern spectrum) という。さらに、それを元の図形の面積の比で表したものをサイズ密度関数 (size density function) という (図 4-6)。サイズ分布関数やサイズ密度関数は、それぞれ確率分布関数、確率密度関数と同じような性質をもち、それゆえ、このような名前がつけられている。従って、確率分布の場合と同様に、画像中の図形の平均サイズや、サイズの分散を考えることができる。



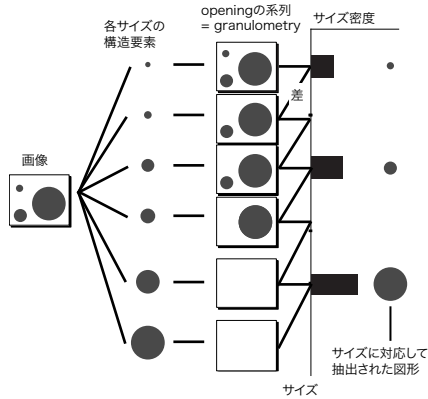


図 4・6 Granulometry とサイズ密度関数

#### 4-4-3 フィルタ定理

モルフォロジにおいて、フィルタとは、画像に対する「移動不変 (translation-invariant)」で「増加的 (increasing)」な操作全体を意味している。ここで、「集合 (画像)  $X$  に対する作用  $\Psi$  が移動不変である」とは、 $\Psi(X_b) = [\Psi(X)]_b$  であることをいう。簡単にいえば、「画像中のどこで作用をおよぼしても、その効果は変わらない」という意味である。また「作用  $\Psi$  が増加的である」とは、 $X \subset Y \Rightarrow \Psi(X) \subset \Psi(Y)$  であることをいう。すなわち、物体の包含関係が作用の前後で保たれることを意味している。増加的なフィルタは、小さな物体を雑音とみなして除去し、大きな物体を保存するので、雑音除去フィルタとしては自然な性質である。

フィルタ定理 (filter theorem) とは、「いかなる移動不変で増加的なフィルタも、適当な構造要素を適当な数だけ用いれば、それらによる erosion の論理和によっても、dilation の論理積によっても表現できる」という定理である。すなわち、モルフォロジ演算と論理演算でたいのみのフィルタが表現でき、モルフォロジが真に物体の形状操作の基礎演算であることを保証するものである。その証明については、文献 4, 5) を参照されたい。また、文献 6, 7) には、メジアンフィルタや平均値フィルタを、具体的にモルフォロジ演算で表現する例がでている。

#### 参考文献

- 1) J. Serra, "Image analysis and mathematical morphology," Academic Press, 1982.
- 2) P. Soille, "Morphological Image Analysis: Principles and Applications," Second Edition, Springer-Verlag, 2003.
- 3) 浅野晃, 浅野千恵, 木森義隆, 榎安実治, 延原肇, 藤尾光彦, "非線形画像・信号処理 モルフォロジの基礎と応用," 丸善, 2010.
- 4) 浅野晃, "マセマティカルモルフォロジーの思想," Fundamentals Review, vol.4, no.2, pp.113-122, 2010.
- 5) H.J.A.M. Heijmans, "Morphological Image Operators," Academic Press, 1994.
- 6) P. Maragos and R.W. Schafer, "Morphological Filters- Part I: Their Set-Theoretic Analysis and Relations to Linear Shift-Invariant Filters," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol.ASSP-35, no.8, pp.1153-1169, 1987.

- 7) P. Maragos and R.W. Schafer, “Morphological Filters- Part II: Their Relations to Median, Order-Statistic, and Stack Filters,” *ibid.*, pp.1170-1184, 1987.

## 1群-9編-4章

## 4-5 ヴォルテラフィルタ

(執筆者: 梶川嘉延)[2009年2月受領]

システムの非線形性を級数展開によって表現するものとしてヴォルテラ級数展開<sup>1)</sup>があり、そのヴォルテラ級数のヴォルテラ核をデジタルフィルタとして捉えたものがヴォルテラフィルタ<sup>2)</sup>である。ヴォルテラフィルタは通信、音響、画像、生体信号処理などさまざまな分野で利用されている。例えば、スピーカが有する非線形性に起因して発生する非線形ひずみを、ヴォルテラフィルタを利用して補正(線形化)する研究が行われている<sup>3)</sup>。本節では、このヴォルテラフィルタに関する基本的性質と適応ヴォルテラフィルタ<sup>2)</sup>について紹介する。

## 4-5-1 ヴォルテラフィルタ

## (1) 離散ヴォルテラ級数展開

非線形の入出力関係をもつシステムは、ヴォルテラ級数展開<sup>1)</sup>によって表すことができる。本稿では簡単のために2次非線形成分までを対象とし、ヴォルテラ核が有限の記憶長 $N$ をもつものとして議論を行う。よって、次式のように表すことができる。

$$y(n) = \sum_{k_1=0}^{N-1} h_1(k_1)x(n-k_1) + \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} h_2(k_1, k_2)x(n-k_1)x(n-k_2) \quad (4.33)$$

ここで、 $x(n)$ と $y(n)$ はそれぞれ標準化された入力信号と出力信号であり、また $h_1(k_1)$ 、 $h_2(k_1, k_2)$ は1次、2次の離散ヴォルテラ核である。

なお、ヴォルテラ核は対称性をもっており、ヴォルテラ核の変数 $k_i$ の順列を任意に入れ換えることができる。例として、2次ヴォルテラ核では以下の関係が成立する。

$$h_2(k_1, k_2) = h_2(k_2, k_1) \quad (4.34)$$

これを図示したものが図4.7(a)である。従って、実際に必要となる係数は、対角成分( $k_1 = k_2$ の成分) $N$ 個と灰色の領域の成分 $N(N-1)/2$ 個の和で、 $N(N+1)/2$ 個である。

## (2) ヴォルテラ級数の離散フーリエ変換

式(4.33)を $N$ 点で離散フーリエ変換(DFT)すると、

$$Y(m) = H_1(m)X(m) + A[H_2(m_1, m_2)X(m_1)X(m_2)] \quad (4.35)$$

となる。ただし、 $X(m)$ 、 $Y(m)$ は $x(n)$ 、 $y(n)$ を1次元DFTしたものであり、 $H_1(m)$ 、 $H_2(m_1, m_2)$ は $h_1(k_1)$ 、 $h_2(k_1, k_2)$ をそれぞれ1次元、2次元DFTしたもので、1次、2次ヴォルテラ周波数応答と呼ばれるものである。そして、 $A$ は多次元の従属変数をもつ関数を1次元の従属変数をもつ関数に変換する縮約演算子である。

ここで、ヴォルテラ核の対称性からヴォルテラ周波数応答も対称性をもつ。すなわち、

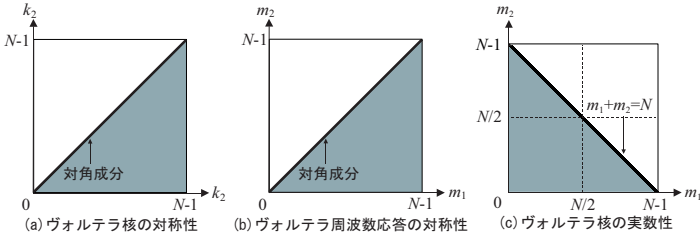


図 4.7 2 次ヴォルテラ核の特徴

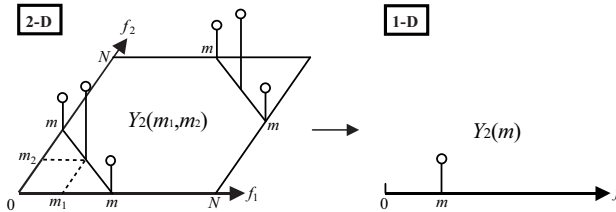


図 4.8 縮約演算の概念図

$$H_2(m_1, m_2) = H_2(m_2, m_1) \tag{4.36}$$

のような関係がある。これを図示したものが、図 4.7(b) である。対称性により必要な係数の個数は 2 次の場合で  $N(N + 1)/2$  個となる。

また、ヴォルテラ核が実数の場合、ヴォルテラ周波数応答には複素共役の関係がある。従って、

$$H_2(m_1, m_2) = H_2^*(N - m_1, N - m_2) \tag{4.37}$$

なる関係がある。ここで、\* は複素共役である。図 4.7(c) に示す白と灰色の領域の領域は  $m_1 + m_2 = N$  に関して複素共役の関係となる。

### (3) 縮約

縮約とは、多次元の従属変数をもつ関数を 1 次元の従属変数をもつ関数に変換する演算である。2 次元の従属変数をもつ関数を 1 次元の従属変数をもつ関数に変換する演算は

$$\begin{aligned} Y(m) &= A[Y'_2(m_1, m_2)] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m_1+m_2=m \text{ or } m+N} Y'_2(m_1, m_2) \end{aligned} \tag{4.38}$$

と表せる。ここで、 $Y(m)$ 、 $Y'_2(m_1, m_2)$  は 1 次元、2 次元の従属変数をもつ関数である。また、式 (4.38) を図示すると図 4.8 のようになる。図 4.8 において、周波数  $m$  での出力  $Y(m)$  を求めるには、 $m_1 + m_2 = m \text{ or } m + N$  が成立する部分の  $Y'_2(m_1, m_2)$  の値を加え合わせればよい。

## 4-5-2 適応ヴォルテラフィルタ

適応ヴォルテラフィルタは非線形システムの同定において強力なツールとなる。また、非

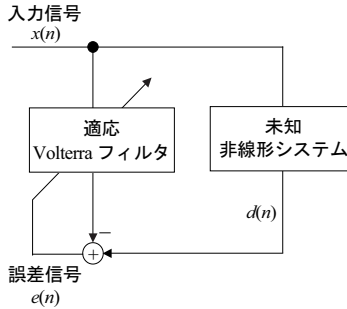


図 4-9 適応ヴォルテラフィルタによる同定のブロック図

線形システムを対象にしているにもかかわらず、各次数のフィルタ自体は線形として扱えるため、その適応アルゴリズムは必ず大域的解に収束するという極めて重要な特徴を有している。また、適応ヴォルテラフィルタはその非線形の畳込みにおいて入力信号の積が必然的に必要とされるため、例えば入力信号が白色雑音であったとしてもその積は有色性をもつため、従来の適応フィルタとは異なる特性を有することになる。しかしながら、基本的に従来の適応フィルタで考案されてきたアルゴリズムを容易に拡張することができるため、LMS 法<sup>4)</sup>に代表される勾配法に基づくアルゴリズムや RLS 法に代表される最小二乗法に基づくアルゴリズムが存在する。また、適応ヴォルテラフィルタの誤差曲面の性質を利用した独自の更新アルゴリズムも提案されている<sup>5)</sup>。

図 4-9 に非線形システムを適応ヴォルテラフィルタで同定する場合の基本的なブロック図を示す。ここで適応ヴォルテラフィルタは未知システムの出力  $d(n)$  と自分自身の出力  $y(n)$  との誤差  $e(n)$  を手がかりにして同定を行う。この場合、適応ヴォルテラフィルタは誤差信号  $e(n)$  の二乗期待値（コスト関数）を最小化するように修正が行われる。修正法としてはコスト関数の勾配を逐次求める勾配法や最小二乗法を再帰的に行う RLS 法などが考えられる。これらの詳細については文献<sup>2)</sup>を参照されたい。また、システム同定におけるヴォルテラフィルタ特有のサンプリング定理については文献<sup>6)</sup>を参照されたい。

#### 参考文献

- 1) M. Schetzen, "The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems," Kriger, Florida, 1989.
- 2) V.J. Mathews and G.L. Sicuranza, "Polynomial signal processing," John Wiley, New York, 2000.
- 3) W.A. Frank, "An efficient approximation to the quadratic Volterra filter and its application in real-time loudspeaker linearization," Signal Processing, vol.45, pp.97-113, 1995.
- 4) T. Koh and E.J. Powers, "Second-order Volterra filtering and its application to nonlinear system identification," IEEE Trans. Acoustic, Speech, and Signal Processing, vol.33, no.6, pp.1445-1455, 1985.
- 5) 趙晋輝, 宇野晋平, 久保田智規, 猪股篤, "Volterra 形非線形 FIR 適応フィルタの高速収束算法に関する考察," 信学論 (A), vol.J84-A, no.11, pp.1333-1345, 2001.
- 6) W.A. Frank, "Sampling requirements for Volterra system identification," IEEE Signal Processing Letters, vol.3, issue 9, pp. 266-268, 1996.