

1群(信号・システム) - 9編(デジタル信号処理)

2章 デジタルフィルタの設計

(執筆者：難元孝夫・Wu-Sheng Lu・奥田正浩)[2008年9月受領]

概要

フィルタ設計はアナログフィルタ近似にはじまり、その歴史は60年以上前にまでさかのぼることができる。アナログフィルタの近似問題は数学的厳密性が要求され、その解のほとんどが解析的に閉じた形で与えられる。バターワースフィルタやチェビシェフフィルタなどがその代表例である。デジタルフィルタの設計問題においてもアナログフィルタ理論を利用する手法がよく知られており現在でも用いられている。一方では多項式を伝達関数に持つ非巡回形(FIR)デジタルフィルタの設計問題や巡回形(IIR)デジタルフィルタの係数感度を考慮した設計、多次元デジタルフィルタ設計などはデジタルフィルタ固有の近似問題であり、数値演算法手を積極的に利用した理論体系を構成している。今日では、巡回形及び非巡回形デジタルフィルタの設計ソフトウェアやプログラムが数多く普及しており、その多くが本章で紹介する手法に基づいている。

FIR デジタルフィルタは伝達関数が多項式であるのに対して IIR デジタルフィルタの伝達関数は有理関数であり、その二種のフィルタの設計手法は大きく異なる。

本章は FIR デジタルフィルタと IIR デジタルフィルタのそれぞれについて、デジタルフィルタ設計理論の最重要事項をまとめたものである。

【本章の構成】

2-1 節の非巡回デジタルフィルタでは、窓関数による設計、最小自乗近似、Remez のアルゴリズム等の代表的な近似手法を紹介している。2-2 節の巡回型デジタルフィルタでは非巡回形デジタルフィルタとの比較、安定性と係数感度、アナログフィルタ理論を用いた設計法、周波数領域における設計、時間領域における設計などについて詳細に述べている。

1 群 - 9 編 - 2 章

2-1 非巡回形デジタルフィルタ

(執筆者: 奥田正浩) [2009 年 2 月受領]

非巡回型デジタルフィルタは FIR デジタルフィルタともよばれ (以下, FIR フィルタ), 有限のインパルス応答をもつ線形時不変システムである. 一般にフィルタ長 N の伝達関数は以下で表される.

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (2.1)$$

また周波数特性は

$$H(z)|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jn\omega} \quad (2.2)$$

である. フィルタ係数 $h(n)$ が以下の条件を満たすとき

$$h(n) = \pm h(N-1-n) \quad (2.3)$$

つまりフィルタ係数 $h(n)$ が対称であるとき, FIR フィルタは線形位相をもち, 線形位相 FIR フィルタ (または直線位相 FIR フィルタ) とよばれる. このフィルタが線形位相になることは以下の手順で容易に確かめられる.

フィルタ長 N が奇数で係数が偶対称の場合を考える. 式 (2.3) の条件をもとに式 (2.1) を変形すると,

$$\begin{aligned} H(z) &= h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \cdots + h(2)z^{-(N-3)} + h(1)z^{-(N-2)} + h(0)z^{-(N-1)} \\ &= h(0)\left(1 + z^{-(N-1)}\right) + h(1)\left(z^{-1} + z^{-(N-2)}\right) + \cdots + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-(N-1)} \\ &= z^{-(N-1)/2} \left[h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(N-3)/2} h(n)\left\{z^{(N-1-2n)/2} + z^{-(N-1-2n)/2}\right\} \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

オイラーの公式を用いると周波数特性 $H(e^{j\omega})$ は

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left[h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h(n) \cos\left(\frac{N-1-2n}{2}\omega\right) \right] \\ &= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \hat{h}_n \cos(n\omega) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} M(\omega) \end{aligned} \quad (2.5)$$

ただし $\hat{h}(0) = h((N-1)/2)$, $\hat{h}(n) = 2h((N-1-2n)/2)$ である. ここで式 (2.5) の $e^{-j\omega(N-1)/2}$ は線形位相項であり, $M(\omega)$ は零位相項である. この $M(\omega)$ は実数であるため符号の反転以外は位相特性に影響を与えない. よって線形位相項 $e^{-j\omega(N-1)/2}$ は傾き $(N-1)/2$ の線形位相であるため, このフィルタ $H(z)$ は構造的に線形位相を有することが分かる. これは係数が偶

表 2・1 線形位相 FIR フィルタの周波数特性

$$\hat{h}(0) = h((N-1)/2), \hat{h}(n) = 2h((N-1-2n)/2), \bar{h}(n) = 2h((N-2n)/2)$$

$h(n)$	フィルタ長 N	周波数特性 $H(e^{j\omega})$
偶対称	奇数	$e^{-j(N-1)\omega/2} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \hat{h}_n \cos(n\omega)$
偶対称	偶数	$e^{-j(N-1)\omega/2} \sum_{n=1}^{N/2} \bar{h}_n \cos((n - \frac{1}{2})\omega)$
奇対称	奇数	$e^{-j\{\frac{N-1}{2}\omega - \frac{\pi}{2}\}} \sum_{n=1}^{(N-1)/2} \hat{h}_n \sin(n\omega)$
奇対称	偶数	$e^{-j\{\frac{N-1}{2}\omega - \frac{\pi}{2}\}} \sum_{n=1}^{N/2} \bar{h}_n \sin((n - \frac{1}{2})\omega)$

対称でフィルタ長が奇数の場合であるが、偶対称・奇対称、フィルタ長の偶数・奇数で合計 4 種類の対称性が考えられ、そのすべてが上記と同様に位相項と零位相項に分離できる。それを表 2・1 にまとめる。

2-1-1 フーリエ級数を用いたフィルタの設計

理想的な FIR フィルタの周波数特性を $H_d(e^{j\omega})$ とする。 $H_d(e^{j\omega})$ はサンプリング角周波数を周期とする周期関数であるので以下のとおりフーリエ級数展開が可能である。

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega} \tag{2.6}$$

いまサンプリング角周波数が 2π に正規化されているとするとフーリエ係数 $h(n)$ は

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{jn\omega}) e^{-jn\omega} d\omega \tag{2.7}$$

で求められる。ここで以下の理想的なローパスフィルタを考える。

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} & 0 \leq |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \end{cases} \tag{2.8}$$

この $H_d(e^{j\omega})$ をフーリエ級数に展開し、式 (2.7) を用いて係数を求めると、

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{jn\omega}) e^{-jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j(n-\frac{N-1}{2})\omega} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin\{(n - \frac{N-1}{2})\omega_c\}}{(n - \frac{N-1}{2})\omega_c} \\ &= \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left\{\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega_c\right\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

以上の議論は、sinc 関数を定数倍した式 (2.9) の左辺は ω_c をカットオフ周波数とする理想的なローパスフィルタのインパルス応答であることを示している。さらにフーリエ級数の基底は直交関数であることから式 (2.9) の $h(n)$ を有限項で打ち切った FIR フィルタ $H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jn\omega}$ はその周波数特性 $H(e^{j\omega})$ と所望特性 $H_d(e^{j\omega})$ との自乗誤差を最小化することが保証される。

以上の手順で得られたフィルタは最小自乗の意味で最適であるがこの手法が実際に用いられることは少ない。フィルタの周波数特性が急激に変化する領域で大きな誤差を生ずるから

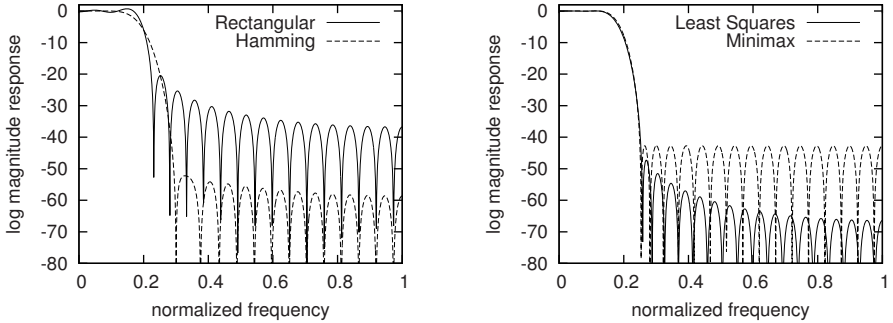


図 2・1 フィルタの設計例:(左) 矩形窓 (Rectangular) とハミング窓 (Hamming) の比較, (右) 最小自乗法 (Least Squares) と Minimax 近似の比較

である。これはギブス現象としてよく知られた性質である。図 2・1(左: 実線) に実際に設計した FIR フィルタの振幅特性を示す。カットオフ周波数近辺で大きな誤差が現れているのが分かる。

2-1-2 窓関数を用いた設計

ギブス現象を抑制する最も簡単で効果的な方法の一つに窓関数がある。これは式 (2・7) のフーリエ係数 $h(n)$ に窓関数 $w(n)$ を乗算することで新たなインパルス応答を生成する手法である。つまり窓関数法により得られる伝達関数は

$$H_w(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_w(n)z^{-n}, \quad \text{ここで } h_w(n) = h(n) \cdot w(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2 \cdot 10)$$

となる。表 2・2 によく用いられる窓関数を列挙する。なお、前節のフーリエ係数を有限項で打ち切る手法は矩形窓を用いた窓関数による設計であるといえる。図 2・1(左: 点線) にハミング窓を用いた設計例を示している。矩形窓と比べ減衰量が大きく改善されていることが分かる。

表 2・2 窓関数の種類

窓関数	$w(n)$
ハミング窓 (Hamming)	$0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$
ブラックマン窓 (Blackman)	$0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$
ハニング窓 (Hanning)	$\frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right\}$
カイザー窓 (Kaiser)	$\frac{I_0\left(\alpha \sqrt{1 - \left\{2n/(N-1)\right\}^2}\right)}{I_0(\alpha)}, \quad (*1)$

(*1) I_0 は零次の第 1 種変形ベッセル関数 ($I_0 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^k \right\}^2$) で α はユーザ指定変数

2-1-3 重み付き最小自乗法による設計

もう一つの簡易な設計法として最小自乗法がある．これは以下の平均自乗誤差を最小化するフィルタを求める問題として定式化される．

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(\omega) |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (2\cdot11)$$

ここで $W(\omega)$ は重み関数， $H_d(e^{-j\omega})$ は所望特性であり設計するフィルタは

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\phi(\omega) \quad (2\cdot12)$$

と表されるとする．一般の FIR フィルタの場合は $\phi(\omega) = e^{-j\omega}$ であり，線形位相 FIR フィルタの場合は表 (2・1) のとおり $\phi(\omega) = \cos(\omega)$ などである．式 (2・11) の誤差 E は

$$E = \mathbf{h}Q\mathbf{h} - 2\mathbf{h}p + d, \quad (2\cdot13)$$

のとおり表現できる．ここで d は $H_d(e^{-j\omega})$ から計算される定数であり， p ， Q の要素をそれぞれ $p(m)$ ， $q(m, n)$ とすると以下のとおり表される．

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= [h(0) \ h(1) \ \cdots \ h(N-1)]^T \\ p(m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(\omega) H_d(e^{-j\omega}) \phi(m\omega) d\omega \\ q(m, n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(\omega) \phi(m\omega) \phi(n\omega) d\omega \end{aligned} \quad (2\cdot14)$$

式 (2・13) の最適解は $\partial E / \partial \mathbf{h} = 0$ を解くことで求められる．すなわち

$$Q\mathbf{h} = p \quad (2\cdot15)$$

を \mathbf{h} に関して解けばよい．ここで $W(\omega) = 1$ の場合は前に述べたフーリエ係数 (2・7) を有限項で打ち切ることによって得られるフィルタと一致する．以上の手法で得られた設計例を図 2・1(右: 実線) に示す．実際の設計ではカットオフ周波数近辺に遷移域をもうけ，その区間の重み関数を 0 にする．また通過域と阻止域の重みを変えることで減衰量のある程度コントロールすることができ，窓関数法よりも柔軟なフィルタ設計が可能となる．

2-1-4 Minimax 近似

近似領域内での誤差の最大値を最小化する近似法を Minimax 近似 (または Chebyshev 近似，最良近似) という．ここでは線形位相 FIR フィルタの Minimax 近似について取り上げる．線形位相 FIR フィルタの振幅特性 $M(\omega)$ は表 2・1 にあるとおり \sin または \cos を基底関数とする多項式で与えられる．例えば偶対称でフィルタ長が奇数の場合は

$$M(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{h}(n) \cos(n\omega) \quad (2\cdot16)$$

である．線形位相 FIR フィルタの Minimax 近似は以下の評価関数を最小化する問題である．

$$E = \max_{\omega} |M_d(\omega) - M(\omega)| \quad (2 \cdot 17)$$

ここで $M_d(\omega)$ は所望の振幅特性である。線形位相 FIR フィルタの基底関数 $\{1, \cos(x), \dots, \cos(Nx)\}$, $[0, \pi]$ 上の $\{\sin(x), \sin(2x), \dots, \sin(Nx)\}$, などはいずれもチェビシェフ系であり, この場合 Minimax 解が唯一存在する。さらに近似区間上でその Minimax 解の誤差関数 $M_d(\omega_i) - M(\omega_i)$ の極値が $N + 1$ 個存在し, かつ, それらを大小の順に並べたとき $M_d(\omega_i) - M(\omega_i)$ の値が交互に符号をかえることが証明されている^{1)*}。

Minimax 近似問題を実際に解く方法は, 既に種々研究されているが, そのうちの一つに Remez のアルゴリズムである。Remez の方法を線形位相 FIR デジタルフィルタの設計に適用したのが Parks と McClellan であり, Parks-McClellan のアルゴリズムとして知られている³⁾。それを以下に説明する。

【Parks-McClellan のアルゴリズム】

Step 1. 適当な周波数点 ω_i , ($i = 0, 1, \dots, N + 1$) を設定する。

Step 2. 以下の式を解き係数 $\hat{h}(n)$ を決定する。

$$W(\omega)[M_d(\omega_i) - M(\omega_i)] = (-1)^i \delta, \quad i = 1, 2, \dots, N + 1 \quad (2 \cdot 18)$$

Step 3. 誤差 $D(e^{j\omega_i}) - A(e^{j\omega_i})$ の極値点を探し求め, 極値をとる周波数点を新しい ω_i ($i = 1, 2, \dots, N + 1$) とする。

Step 4. 極値点に変化しなくなれば終了。そうでなければ Step 2 に戻る。

式 (2・18) はこのアルゴリズムによるフィルタ設計プログラムは文献 3) に詳しく掲載されている。図 2・1 (右: 点線) に設計例を示す。近似帯域内で誤差が等リプルとなり誤差の最大値が最小化されている。

2-1-5 最小位相推移フィルタの設計

FIR フィルタの伝達関数 (2・1) のすべての零点が単位円または単位円上に存在するとき, その FIR フィルタを最小位相推移フィルタ (または最小位相フィルタ) とよぶ*。厳密に単位円内のみ零点をもつとき, $\omega = 0, \pi$ における位相特性が一致し位相の推移が零となる。また線形位相項をもたないため線形位相フィルタよりも遅延時間が短い。図 2・2 にフィルタ長 $N = 51$ で同等の振幅特性をもつ線形位相 FIR フィルタと最小位相 FIR フィルタのインパルス応答を示す。線形位相フィルタは群遅延量が次数 $N - 1$ の半分であり最もエネルギーが集中する出力は $(N - 1)/2$ サンプル付近であるのに対し, 最小位相フィルタは遅延時間が短いのが分かる。

以下に最も頻繁に用いられる最小位相推移フィルタの設計法を示す。まず $H(z)$ を直接設計するのではなく以下に示す対称な係数をもつ関数 $G(z)$ を考える。

* これをチェビシェフの定理という。

* 狭義の意味では単位円上の零点は含まれないこともある。

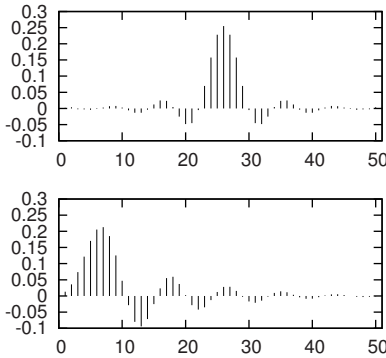


図 2.2 線形位相フィルタ (上) と最小位相推移フィルタ (下) のインパルス応答

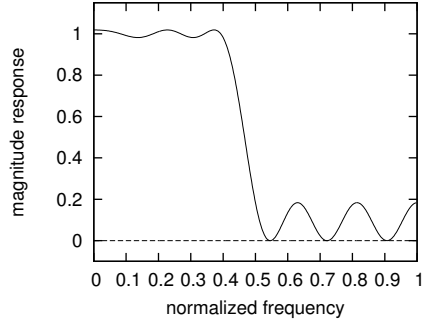


図 2.3 $M_g(\omega)$ の特性

$$G(z) = g(0) + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2} + \dots + g(1)z^{-2N+3} + g(0)z^{-2N+2} \quad (2.19)$$

$G(z)$ の係数は対称であるのでこれは線形位相 FIR フィルタである．式 (2.5) よりこのフィルタの周波数特性は

$$G(e^{-j\omega}) = e^{-j(N-1)\omega} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{g}(n) \cos(n\omega) \quad (2.20)$$

とおける．この零位相項を $M_g(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{g}(n) \cos(n\omega)$ とする．ここで前述の Parks-McClellan のアルゴリズムを用いて $M_g(\omega)$ が図 2.3 のように最小値が 0 となる等リプルフィルタを設計する．

このようにして得られた $G(z)$ は以下のように表現できる．

$$\hat{G}(z) = \left\{ \prod_i (z - e^{j\phi_i})^2 \right\} \left\{ \prod_j (z - z_j)(z - z_j^{-1}) \right\}, \quad (|z_j| < 1) \quad (2.21)$$

つまり，単位円上の零点 $e^{j\phi_i}$ は必ず 2 重零点となり， $G(z)$ の係数は対称であるから $G(z) = z^{-(N-1)} G(z^{-1})$ となり， z_j が $G(z)$ の零点であるとき， z_j^{-1} も零点となる．

よって $G(z)$ の零点のうち，単位円上のすべての零点ペアのうちの一つと単位円内の零点からなるフィルタを $H(z)$ とすれば $G(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2$ を満たす最小位相推移 FIR フィルタ $H(z)$ が得られる．

参考文献

- 1) エリア・リュステルニク, アエリ・ヤンボリスキー, “関数論の基礎「第 2 章：関数の補間と近似」,” 総合図書.
- 2) S.K. Mitra and J.F. Kaiser, “Handbook for digital signal processing,” Wiley Interscience, Jhon Wiley and Sons, 1993.

- 3) J.H. McClellan, T.H. Parks, and L.R. Rabiner, "A Computer Program for Designing Optimum FIR Linear Phase Digital Filters," IEEE Trans. Audio. Electroacoustics, vol.AU-21, no.6, pp.506-526, 1973.

1群-9編-2章

2-2 巡回形ディジタルフィルタ

(執筆者：雛元孝夫・Wu-Sheng Lu) [2008年8月受領]

2-2-1 FIR デジタルフィルタとの比較

(1) 線形差分方程式とブロック線図

n 次の線形差分方程式 (linear difference equation)

$$y(k) = - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^n b_i u(k-i) \tag{2.22}$$

を考える。ただし、 $u(k)$ と $y(k)$ はそれぞれスカラー入力とスカラー出力である。初期条件を $u(k) = y(k) = 0 (k < 0)$ とおく。いま、 $z^{-1}u(k) = u(k-1)$ と及び $z^{-1}y(k) = y(k-1)$ を満たす遅延素子 z^{-1} を用いれば、式 (2.22) は次のように書き換えられる。

$$\left(1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i} \right) y(k) = \left(\sum_{i=0}^n b_i z^{-i} \right) u(k) \tag{2.23}$$

さらに、適当な中間変数 $v(k)$ を導入すれば、式 (2.23) は

$$y(k) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n})v(k), \quad v(k) = \frac{u(k)}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \tag{2.24}$$

の二つの式に分解される。式 (2.24) は等価的に

$$\begin{aligned} y(k) &= b_0 v(k) + b_1 v(k-1) + \dots + b_n v(k-n) \\ v(k) &= u(k) - a_1 v(k-1) - \dots - a_n v(k-n) \end{aligned} \tag{2.25}$$

のように書き換えられる。式 (2.25) をブロック線図によって表せば図 2.4 のようになる。図 2.4 にはフィードバックループが含まれており、このような構造のシステムを IIR デジタルフィルタまたは巡回形ディジタルフィルタとよぶ。図 2.4 にフィードバックループが存在

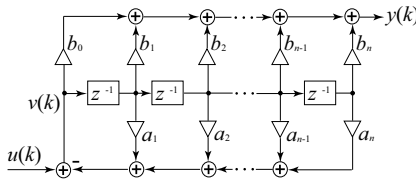


図 2.4 IIR デジタルフィルタ

しないとき、すなわち、 $a_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ の場合、式 (2.22) は

$$y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) \tag{2.26}$$

となり、式 (2.26) は図 2.5 のブロック線図によって表される。図 2.5 にはフィードフォー

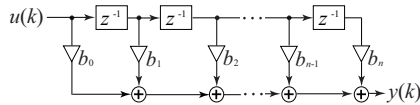


図 2.5 FIR デジタルフィルタ

ド経路のみが存在し、フィードバックループが含まれない。このような構造のシステムを FIR デジタルフィルタ, 非巡回形デジタルフィルタ, またはトランスバーサルフィルタとよぶ。

式 (2.23) の場合と同様に、式 (2.22) を遅延素子 z^{-1} を用いて表せば、次式が得られる。

$$y(k) = b_0u(k) + [b_1u(k) - a_1y(k)]z^{-1} + \dots + [b_nu(k) - a_ny(k)]z^{-n} \quad (2.27)$$

式 (2.27) をブロック線図によって表せば図 2.6 のようになる。図 2.6 は、図 2.4 における信号の流れる方向をすべて逆向きにすれば描くことができるので、図 2.4 の転置形とよばれる。図 2.6 にフィードバックループが存在しないとき、すなわち、 $a_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$

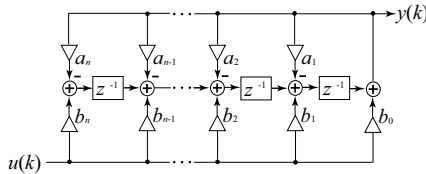


図 2.6 IIR デジタルフィルタの転置形

の場合、式 (2.27) から次式が得られる。

$$y(k) = b_0u(k) + b_1u(k)z^{-1} + \dots + b_nu(k)z^{-n} \quad (2.28)$$

式 (2.28) をブロック線図によって表せば図 2.7 のようになる。図 2.7 は、図 2.5 における信号の流れる方向をすべて逆向きにすれば描くことができるので、図 2.5 の転置形とよばれる。

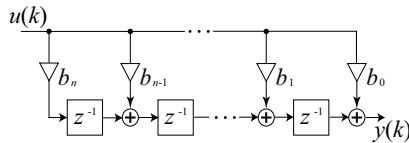


図 2.7 FIR デジタルフィルタの転置形

(2) IIR デジタルフィルタの伝達関数と周波数特性

式 (2.22) の両辺を z 変換すれば、次の伝達関数 $H(z)$ が導かれる。

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_nz^{-n}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}} \quad (2.29)$$

ただし、 $U(z)$ と $Y(z)$ は $u(k)$ と $y(k)$ の z 変換をそれぞれ表す。式 (2.29) の分母多項式を

0 にする z の値 p_i を極 (pole), 分子多項式を 0 にする z の値 q_i を零点 (zero) とよぶ。式 (2・29) に一般性をもたせて分子の次数を m とおき, 極と零点を用いて表せば,

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = b_0 \frac{\prod_{i=1}^m (1 - q_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^n (1 - p_i z^{-1})} \quad (2\cdot30)$$

が導かれる。式 (2・30) の伝達関数をもつシステムが安定であるための必要十分条件は, すべての極が複素平面上の単位円内に存在することである。すなわち,

$$|p_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2\cdot31)$$

式 (2・30) のシステムの周波数特性は, $z = e^{j\omega}$ とおいて,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega} + \dots + b_m e^{-jm\omega}}{1 + a_1 e^{-j\omega} + \dots + a_n e^{-jn\omega}} = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)} \quad (2\cdot32)$$

のように求められる。ただし, $a_0 = 1$ として

$$|H(e^{j\omega})| = \left[\frac{\left(\sum_{i=0}^m b_i \cos i\omega \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^m b_i \sin i\omega \right)^2}{\left(\sum_{i=0}^n a_i \cos i\omega \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n a_i \sin i\omega \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta(\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{\sum_{i=1}^m a_i \sin i\omega}{\sum_{i=0}^n a_i \cos i\omega} \right] - \tan^{-1} \left[\frac{\sum_{i=1}^m b_i \sin i\omega}{\sum_{i=0}^m b_i \cos i\omega} \right]$$

ここで, $|H(e^{j\omega})|$ と $\theta(\omega)$ は振幅特性及び位相特性とそれぞれよばれる。振幅特性は偶対称, 位相特性は奇対称の性質をもつ。すなわち,

$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|, \quad \theta(\omega) = -\theta(-\omega) \quad (2\cdot33)$$

が成り立つ。式 (2・33) から次式が導出できる。

$$\theta(\omega) = \frac{1}{j2} \ln \left[\frac{H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})} \right] \quad (2\cdot34)$$

フィルタの群遅延 (group delay) が

$$\tau(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \quad (2\cdot35)$$

によって定義される。群遅延は一定であることが望ましい。これは次式から計算できる¹⁾。

$$\tau(\omega) = -jz \left. \frac{d\theta(\omega)}{dz} \right|_{z=e^{j\omega}} = -\frac{1}{2} \left[z \left(\frac{d \ln H(z)}{dz} - \frac{d \ln H(z^{-1})}{dz} \right) \right]_{z=e^{j\omega}} \quad (2\cdot36)$$

$$= -\operatorname{Re} \left[z \frac{dH(z)/dz}{H(z)} \right]_{z=e^{j\omega}} = \operatorname{Re} \left[\frac{\sum_{i=1}^m i b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^m b_i z^{-i}} - \frac{\sum_{i=1}^n i a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}} \right]_{z=e^{j\omega}}$$

式 (2・29) の特別かつ重要な場合として, 次の伝達関数がある。

$$H(z) = \frac{a_n + a_{n-1}z^{-1} + \cdots + a_0z^{-n}}{a_0 + a_1z^{-1} + \cdots + a_nz^{-n}} = \frac{a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n}{a_0 + a_1z^{-1} + \cdots + a_nz^{-n}} z^{-n} \quad (2\cdot37)$$

このフィルタの周波数特性は

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j[n\omega + 2\theta(\omega)]}, \quad \theta(\omega) = -\tan^{-1} \left[\frac{\sum_{i=1}^n a_i \sin i\omega}{\sum_{i=0}^n a_i \cos i\omega} \right] \quad (2\cdot38)$$

によって与えられる。式(2・37)は全周波数領域においてゲイン1の振幅特性をもつ。このため、全域通過フィルタ(all-pass filter)とよばれる。このフィルタをIIRデジタルフィルタに従属接続し、全体の位相特性を補正するために利用できる。

(3) FIR デジタルフィルタの伝達関数と周波数特性

式(2・30)をベキ級数展開すれば、次式が得られる。

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \cdots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + \cdots + a_nz^{-n}} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} \quad (2\cdot39)$$

ここで、 h_k はインパルス応答に相当する。このベキ級数展開を有限項で打ち切って近似すればFIRデジタルフィルタが得られ、その伝達関数は次のように与えられる。

$$H(z) = h_0 + h_1z^{-1} + \cdots + h_{N-1}z^{-(N-1)} = \frac{h_0z^{N-1} + h_1z^{N-2} + \cdots + h_{N-1}}{z^{N-1}} \quad (2\cdot40)$$

式(2・40)から明らかのように、FIRデジタルフィルタの極はすべて複素平面上の原点にある。すなわち、 $p_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$)でFIRデジタルフィルタは常に安定になる。

(4) IIR フィルタと FIR フィルタの比較

IIRデジタルフィルタではフィードバックループが存在して安定性が必ずしも保証されない。また、厳密な意味での線形位相が実現できない。一方、FIRデジタルフィルタではフィードバックループが存在せず常に安定性が保証される。また、厳密な線形位相が実現できる。しかし、FIRデジタルフィルタを用いてIIRデジタルフィルタと同程度の振幅特性を実現しようとするれば、かなり大きいフィルタ次数を必要とする。従って、FIRデジタルフィルタを実現する場合には、IIRデジタルフィルタに比べて多くの係数乗算器やメモリーを必要とし、処理時間も増大する。なお、IIRデジタルフィルタでは全域通過特性が実現できるために、これを位相特性の補正に利用できる。

2-2-2 安定性と係数感度

(1) インパルス応答に基づく安定性

[定義1] 任意の有界入力に対して有界出力を生じるとき、巡回形デジタルフィルタは安定であるという。

[定理1] 巡回形デジタルフィルタが安定であるための必要十分条件は、インパルス応答 $\{h(k)\}$ が次の条件を満たすことである。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (2\cdot41)$$

(2) 極に基づく安定性

ここでは、巡回形デジタルフィルタが伝達関数

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \quad (2.42)$$

によって記述される場合について、 z 平面上における特性方程式 $1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n} = 0$ の根 $\{p_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ ，すなわち，極の立場で安定条件が示される。

[定理 2] 式 (2.42) によって記述された巡回形デジタルフィルタが安定であるための必要十分条件は、すべての極 $\{p_i\}$ が z 平面上の単位円内に存在することである。すなわち、

$$|p_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.43)$$

(3) シュー・コーンの判別法

次の n 次多項式について

$$A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \quad (2.44)$$

シュー・コーンの判別法ではサイズが 2×2 から $2n \times 2n$ に変化する n 個の行列の行列式を評価し、すべての極が z 平面上の単位円内にあるか否かを調べて安定性を判別している²⁾。そのほか、シュー・コーンに基づく安定判別法の効率的な改良版であるシュー・コーン・藤原の判別法²⁾、シュー・コーン判別法に要する計算を簡略化したマーデの結果²⁾を用いた効率的で使い易いジュリー・マーデの判別法²⁾がある。更に、ジュリー・マーデの判別法を 2 次多項式 $A(z) = z^2 + a_1 z + a_2$ に適用すれば、安定であるための必要十分条件が

$$a_2 < 1, \quad a_1 + a_2 > -1, \quad a_1 - a_2 < 1 \quad (2.45)$$

のように得られる。式 (2.45) の三つの線形制約式によって得られた領域が図 2.8 に示されており、安定三角形 (stability triangle) として参照される³⁾。

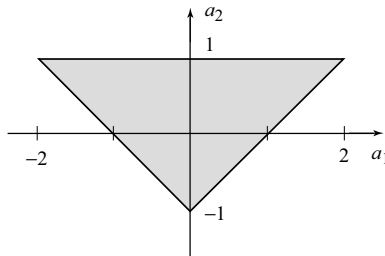


図 2.8 安定三角形

(4) リアプノフの判別法

次の状態空間モデルで記述された巡回形デジタルフィルタが安定であるための必要十分条件は、行列 A のすべての固有値の大きさ (絶対値) が 1 より小さいことである。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(k) + du(k) \end{aligned} \quad (2\cdot46)$$

ただし、 $\mathbf{x}(k)$ は $n \times 1$ 状態変数ベクトル、 $u(k)$ はスカラー入力、 $y(k)$ はスカラー出力であり、 \mathbf{A} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 、 d は適当なサイズの実行列をそれぞれ表す。

[定理 3] (リアプノフの定理) 式 (2·46) の状態空間デジタルフィルタが安定であるための必要十分条件は、 $n \times n$ 正定行列 \mathbf{Q} (例えば \mathbf{I}_n) に対して、次のリアプノフ方程式

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \quad (2\cdot47)$$

を満たす $n \times n$ 正定行列 \mathbf{P} が一意的に存在することである。

(5) 係数感度

式 (2·42) の巡回形デジタルフィルタに対する線形差分方程式は、次式で与えられる。

$$y(k) = - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^m b_i u(k-i) \quad (2\cdot48)$$

ただし、 $u(k)$ はスカラー入力、 $y(k)$ はスカラー出力である。このフィルタを実現するために係数 a_i 、 b_i が量子化されたとき、量子化誤差によって周波数応答や安定性など、フィルタ特性に重大な偏差を生じる可能性がある。こうした偏差はフィルタ係数の変化による極配置の変化を調べることによって解析できる⁴⁾。

Step 1. 極が互に接近したとき係数感度は高くなる。

Step 2. 極 p_i が単位円に近づけば、各 p_i^{n-k} の絶対値はより大きくなって係数感度が増加する。

Step 3. フィルタ感度は最終係数 a_n の変化に対して最も敏感である。一般に、 $i > j$ であるとき、係数 a_i の変化に対するフィルタの感度は係数 a_j の感度よりも高い。

2-2-3 アナログフィルタ理論を用いた設計法⁵⁾

(1) アナログ低域通過フィルタ近似

(a) バタワース近似

n 次のバタワース (Butterworth) 低域通過正規化フィルタの伝達関数は

$$H_N(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (2\cdot49)$$

によって記述される。ただし、 p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) は次の損失関数 $L(-s^2)$ の s 平面上左半平面内に存在する零点である。

$$\begin{aligned} L(-s^2) &= 1 + (-s^2)^n = \prod_{k=1}^{2n} (s - s_k) = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_{2n}) \\ s_k &= \begin{cases} e^{j(2k-1)\pi/2n} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ e^{j(k-1)\pi/n} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

“正規化”の語彙は $\omega = 1$ における $s = j\omega$ に対して $L(1) = 2$ の制約を意味する．その結果， $\omega = 1$ のときバタワース正規化フィルタの振幅は $|H_N(j)| = 1/\sqrt{2}$ になる．

(b) チェビシェフ近似

バタワース低域通過フィルタの振幅応答は ω の単調減少関数である．バランスを保つ特性は，通過域での振幅応答が 1 と A_p dB 誤差を意味する 1 より小さい値 $10^{-0.05A_p}$ の間を振動するチェビシェフ近似によって達成できる．

n 次のチェビシェフ (Chebyshev) 低域通過正規化フィルタの伝達関数は

$$H_N(s) = \frac{H_0}{D_0(s) \prod_{i=1}^r (s - p_i)(s - p_i^*)} \quad (2\cdot50)$$

によって与えられる⁵⁾．ただし，

$$r = \begin{cases} (n-1)/2 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ n/2 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \quad D_0(s) = \begin{cases} s - 1/p_0 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

定数 H_0 と極 p_i は $A_p > 0$ (dB) に対して以下のように計算される．

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (10^{0.1A_p} - 1)^{1/2}, \quad p_0 = \sigma_{(n+1)/2} \quad \text{ここで } \sigma_{(n+1)/2} = -\sinh\left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right) \\ p_i &= \sigma_i + j\omega_i \quad (i = 1, 2, \dots, r) \\ \sigma_i &= -\sinh\left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right) \sin \frac{(2i-1)\pi}{2n}, \quad \omega_i = \cosh\left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right) \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n} \\ H_0 &= \begin{cases} -p_0 \prod_{i=1}^r |p_i|^2 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 10^{-0.05A_p} \prod_{i=1}^r |p_i|^2 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 変換によるほかのアナログフィルタ近似

一般的な低域通過，高域通過，帯域通過，帯域阻止フィルタ近似は $s = f(\bar{s})$ の変換を用いて低域通過正規化フィルタ近似から導出できる⁵⁾．

(3) アナログフィルタ理論に基づく設計法⁵⁾

(a) インパルス応答不変法

$H_A(s) = N(s)/D(s)$ はインパルス応答 $h_A(t)$ をもつ巡回形アナログフィルタであるとする．インパルス応答不変法を用いて設計された巡回形デジタルフィルタでは，そのインパルス応答 $h_D(k)$ がアナログフィルタのインパルス応答 $h_A(t)$ の標本値に等しい⁶⁾．すなわち，

$$h_D(k) = h_A(t)|_{t=kT} = h_A(kT) \quad (2\cdot51)$$

デジタルフィルタの伝達関数はインパルス応答を用いてのように表される．

$$H_D(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_D(k) z^{-k} \quad (2\cdot52)$$

一方， $H_A(s)$ は次式のように部分分数に展開できる．

$$H_A(s) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i} \quad (2.53)$$

ただし, p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) は $H_A(s)$ の極である. このため, 式 (2.51) と式 (2.53) から

$$h_A(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t}, \quad h_A(kT) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i kT} = \sum_{i=1}^n K_i (e^{p_i T})^k \quad (2.54)$$

が導ける. さらに, 式 (2.52) を用いれば巡回形デジタルフィルタの伝達関数が

$$H_D(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^n K_i (e^{p_i T})^k \right] z^{-n} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i z}{z - e^{p_i T}} \quad (2.55)$$

のように得られる. 式 (2.55) の伝達関数も n 個の極をもち, アナログフィルタ $H_A(s)$ が安定ですべての極 p_i の実部が負であれば, $e^{p_i T}$ の絶対値は 1 より小さく, デジタルフィルタ $H_D(z)$ も安定になる. 本設計法は, 次の三つのステップに要約される.

Step 1. 伝達関数 $H_A(s)$ をもつアナログプロトタイプフィルタを設計する.

Step 2. 式 (2.53) に示されるように $H_A(s)$ を部分分数に展開する.

Step 3. ステップ 2 で得られた K_i と p_i を用いて, 式 (2.55) からデジタルフィルタの伝達関数 $H_D(z)$ を求める.

(b) 双 1 次変換法

双 1 次変換法 (bilinear transformation) は, 次の分子と分母に関して線形の写像である.

$$s = \frac{1}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \quad (2.56)$$

ただし, T (sec) は標本周期である. アナログ伝達関数 $H_A(s)$ に双 1 次変換を適用して, 次式のデジタル伝達関数 $H_D(z)$ が導かれる.

$$H_D(z) = H_A(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)} \quad (2.57)$$

得られたデジタルフィルタの時間領域応答は, アナログプロトタイプフィルタの応答と近似的に同一であり, 二つの時間領域応答は T が小さくなればさらに接近する⁵⁾.

2-2-4 周波数領域における設計法

(1) 最小 2 乗誤差に基づく設計法⁷⁾

巡回形デジタルフィルタを, 次の伝達関数によって記述する.

$$H(z, \mathbf{x}) = A \prod_{k=1}^K \frac{1 + a_k z^{-1} + b_k z^{-2}}{1 + c_k z^{-1} + d_k z^{-2}} \quad (2.58)$$

ただし, $\mathbf{x} = [a_1 \ b_1 \ c_1 \ d_1 \ \cdots \ a_K \ b_K \ c_K \ d_K \ A]^T$ は $(4K+1) \times 1$ 設計変数ベクトルである. $H_d(\omega)$ は所望の周波数応答, $\Omega_L = \{\omega_i, i = 1, 2, \dots, L\}$ は周波数領域 $[-\pi, \pi]$ を L 等分して離散化した評価点の集合である. 実際の振幅応答 $|H(e^{j\omega}, \mathbf{x})|$ が理想の振幅応答 $|H_d(\omega)|$ を近似する際の誤差は, 次の平均 2 乗誤差を用いて評価する.

$$J_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^L \left[|H(e^{j\omega_i}, \mathbf{x})| - |H_d(\omega_i)| \right]^2 \quad (2.59)$$

設計問題は, 目的関数である式 (2.59) の平均 2 乗誤差 $J_2(\mathbf{x})$ を最小化するベクトル \mathbf{x} を求める問題として定式化される. この問題を解く場合に適した多くの最適化法がある⁸⁾. これらの最適化法では目的関数の勾配を知る必要がある. 式 (2.59) から $J_2(\mathbf{x})$ の勾配は,

$$\nabla J_2(\mathbf{x}) = 2 \sum_{i=1}^L \left[|H(e^{j\omega_i}, \mathbf{x})| - |H_d(\omega_i)| \right] \nabla \left(|H(e^{j\omega_i}, \mathbf{x})| \right) \quad (2.60)$$

によって与えられる. ただし,

$$\begin{aligned} \nabla \left(|H(e^{j\omega_i}, \mathbf{x})| \right) = & \left[\partial |H(e^{j\omega_i}, \mathbf{x})| / \partial a_1, \partial |H(e^{j\omega_i}, \mathbf{x})| / \partial b_1, \partial |H(e^{j\omega_i}, \mathbf{x})| / \partial c_1, \right. \\ & \left. \partial |H(e^{j\omega_i}, \mathbf{x})| / \partial d_1, \dots, \partial |H(e^{j\omega_i}, \mathbf{x})| / \partial A \right] \end{aligned}$$

本設計問題を解くために準ニュートン法⁸⁾を適用したとき, 第 k ステップにおいて設計変数ベクトルは, 次式に従って \mathbf{x}_k から \mathbf{x}_{k+1} に更新される.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k \quad (2.61)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_k &= -S_k \nabla J_2(\mathbf{x}_k), \quad \alpha_k = \arg \min_{\alpha} J_2(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k) \\ S_{k+1} &= S_k + \left(1 + \frac{\boldsymbol{\gamma}_k^T S_k \boldsymbol{\gamma}_k}{\boldsymbol{\gamma}_k^T \boldsymbol{\delta}_k} \right) \frac{\boldsymbol{\delta}_k \boldsymbol{\delta}_k^T}{\boldsymbol{\gamma}_k^T \boldsymbol{\delta}_k} - \frac{\boldsymbol{\delta}_k \boldsymbol{\gamma}_k^T S_k + S_k \boldsymbol{\gamma}_k \boldsymbol{\delta}_k^T}{\boldsymbol{\gamma}_k^T \boldsymbol{\delta}_k} \\ S_0 &= I_{4K+1}, \quad \boldsymbol{\delta}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k, \quad \boldsymbol{\gamma}_k = \nabla J_2(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla J_2(\mathbf{x}_k) \end{aligned}$$

ステップサイズ α_k は $J_2(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k)$ を α について最小化することによって求められる. Fletcher が始めた不正確線形探索法はこの計算の実行に効果的である⁸⁾. 準ニュートン法では安定で大まかな巡回形フィルタに相当する初期値 \mathbf{x}_0 から出発して, 反復は $|J_2(\mathbf{x}_{k+1}) - J_2(\mathbf{x}_k)|$ が所定の許容量 ε より小さくなるまで続けられる.

そのほか, 線形計画法を用いた等リップル設計法^{9, 10)}, 安定性の制約下における重み付最小 2 乗設計法¹¹⁾, 安定性の制約下におけるミニ・マックス設計法¹¹⁾などがある.

2-2-5 時間領域設計法

(1) 方程式誤差に基づく方法¹²⁾

線形離散時間システムの伝達関数が, 理想のインパルス応答 f_k ($k = 0, 1, \dots, N$) の立場で,

$$F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots + f_N z^{-N} \quad (2.62)$$

によって与えられるものとする。次に、実際の巡回形デジタルフィルタの伝達関数が

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} \quad (2.63)$$

によって記述されるものとする。時間領域におけるフィルタ設計問題は、有限区間 $0 \leq k \leq N$ 上で h_k が所与のインパルス応答 f_k をある意味において近似する係数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ を求めることである。ここで、 $N \geq m + n$ とする。式 (2.63) から、次の関係式が導かれる。

$$b_k = \sum_{i=0}^k h_{k-i} a_i \quad (0 \leq k \leq m), \quad 0 = \sum_{i=0}^k h_{k-i} a_i \quad (m < k \leq N) \quad (2.64)$$

ただし、 $a_0 = 1$ かつ $h_k = 0$ ($k < 0$) である。

式 (2.64) における未知の h_k を所与の理想インパルス応答 f_k で置き換えて、新たに $(N-1) \times 1$ 誤差ベクトル e_1 を定義すれば、式 (2.64) は次のように変形される。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ e_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

ただし、

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]^T, \quad \mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m]^T$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} f_0 & 0 & \dots & 0 \\ f_1 & f_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m & f_{m-1} & \dots & f_{m-n} \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} f_{m+1} & f_m & \dots & f_{m-n+1} \\ f_{m+2} & f_{m+1} & \dots & f_{m-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_N & f_{N-1} & \dots & f_{N-n} \end{bmatrix}, \quad f_k = 0 \quad (k < 0)$$

いま、評価関数 $J(\mathbf{a})$ を次のように選ぶものとする。

$$J(\mathbf{a}) = e_1^T e_1 = (\hat{\mathbf{f}} + F_2 S_n \mathbf{a})^T (\hat{\mathbf{f}} + F_2 S_n \mathbf{a}) \quad (2.66)$$

ただし、 $\hat{\mathbf{f}}$ と S_n はそれぞれ次式で定義される $(N-m) \times 1$ 及び $(n+1) \times n$ の行列である。

$$\hat{\mathbf{f}} = F_2 \text{ の第 1 列} \quad S_n = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & \mathbf{I}_n & \end{bmatrix}$$

rank $F_2 S_n = n$ の場合、 $J(\mathbf{a})$ を最小化する最適な分母係数ベクトル \mathbf{a} は、次のようになる。

$$\mathbf{a} = -[S_n^T F_2^T F_2 S_n]^{-1} S_n^T F_2^T \hat{\mathbf{f}} \quad (2.67)$$

ベクトル \mathbf{a} が求めれば、分子係数ベクトル \mathbf{b} は式 (2.65) の上側の式から直ちに求められる。

そのほか、修正型設計法¹²⁾、最小 2 乗法¹³⁾、2 次情報を用いる方法¹⁴⁾などがある。

2-2-6 状態空間デジタルフィルタ

(1) 状態空間モデルとその特性

状態空間デジタルフィルタは、次の状態空間モデルによって記述される。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(k) + du(k) \end{aligned} \quad (2\cdot68)$$

ただし、 $\mathbf{x}(k)$ は $n \times 1$ 状態変数ベクトル、 $u(k)$ はスカラー入力、 $y(k)$ はスカラー出力である。また、 \mathbf{A} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 、 d はそれぞれ $n \times n$ 、 $n \times 1$ 、 $1 \times n$ 、 1×1 の実行列である。ここで、第一式は状態方程式、第二式は出力方程式とそれぞれよばれる。

任意の初期ベクトル $\mathbf{x}(0)$ から、任意の所望ベクトル \mathbf{x}_d に有限ステップ数で状態変数ベクトルを移す入力系列が存在するとき、式 (2・68) は可制御 (controllable) であるという。また、有限の入出力データから $\mathbf{x}(0)$ が一意的に決定できるとき、式 (2・68) は可観測 (observable) であるという。可制御であるための必要十分条件は $\text{rank} [\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \cdots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] = n$ であり、可観測であるための必要十分条件は $\text{rank} [\mathbf{c}^T \ (\mathbf{c}\mathbf{A})^T \ \cdots \ (\mathbf{c}\mathbf{A}^{n-1})^T]^T = n$ である。次の二つの行列

$$\mathbf{K} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \mathbf{b} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^i)^T, \quad \mathbf{W} = \sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{A}^i)^T \mathbf{c}^T \mathbf{c} \mathbf{A}^i \quad (2\cdot69)$$

を定義したとき、 \mathbf{K} は可制御性グラミアン (controllability Grammian)、 \mathbf{W} は可観測性グラミアン (observability Grammian) とそれぞれよばれる。これらは次のリアプノフ方程式を解くことによって求められる。

$$\mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{A}^T + \mathbf{b}\mathbf{b}^T = \mathbf{K}, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{A} + \mathbf{c}^T\mathbf{c} = \mathbf{W} \quad (2\cdot70)$$

式 (2・68) が安定で可制御かつ可観測であるとき、 \mathbf{K} と \mathbf{W} はそれぞれ正定行列になることが知られている。式 (2・68) の可制御性グラミアン \mathbf{K} と可観測性グラミアン \mathbf{W} の間に

$$\mathbf{K} = \mathbf{W} = \text{diag}\{\sigma_1 \ \sigma_2 \ \cdots \ \sigma_n\} \quad (2\cdot71)$$

という関係が成立するとき、式 (2・68) は平衡実現 (balanced realization) であるという。ただし、 σ_i^2 ($i = 1, 2, \dots, n$) は $\mathbf{K}\mathbf{W}$ の固有値を表す。式 (2・68) の状態空間モデルの伝達関数 $H(z)$ は、次式によって与えられる。

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathbf{c}(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} \quad (2\cdot72)$$

ただし、 $h_0 = d$ 及び $h_k = \mathbf{c}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}$ ($k \geq 1$) はインパルス応答を表す。いま、

$$\det(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad (2\cdot73)$$

とおいたとき、特性方程式 (characteristic equation) とよばれる。本式を満たす n 個の根を \mathbf{A} の固有値または伝達関数の極という。 \mathbf{A} は特性方程式を満たし、次式が成り立つ。

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I_n = \mathbf{0} \quad (2.74)$$

これをケーリー・ハミルトンの定理 (Cayley-Hamilton theorem) という。A のすべての固有値が複素平面上の単位円内にあれば、式 (2.68) の状態空間モデルは安定である。

式 (2.68) の状態変数ベクトル $x(k)$ に対して、座標変換 $\bar{x}(k) = T^{-1}x(k)$ を施せば、

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{b}u(k) \\ y(k) &= \bar{c}\bar{x}(k) + du(k) \end{aligned} \quad (2.75)$$

が導かれる。ただし、 $\bar{A} = T^{-1}AT$ 、 $\bar{b} = T^{-1}b$ 、 $\bar{c} = cT$ である。ここで、 T は $n \times n$ の正則行列で座標変換行列 (coordinate transformation matrix) とよばれる。この座標変換を施しても可制御性と可観測性は保存されて伝達関数も不変である。このため、式 (2.75) の状態空間モデルは式 (2.68) の状態空間モデルに対する等価モデル (equivalent model)、 T は等価変換行列 (equivalent transformation matrix) とよばれる。

(2) 伝達関数の状態空間実現

次の伝達関数について考える。

$$H(z) = \frac{b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (2.76)$$

いま、 $H(z) = Y(z)/U(z)$ とおいて、 $U(z)$ と $Y(z)$ がそれぞれ $u(k)$ と $y(k)$ の z 変換を表すとき、式 (2.76) は次の線形差分方程式に書き換えられる。

$$\left(1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}\right) y(k) = \left(\sum_{i=1}^n b_i z^{-i}\right) u(k) \quad (2.77)$$

ここで、 $z^{-1}u(k) = u(k-1)$ 、 $z^{-1}y(k) = y(k-1)$ を満たす遅延素子を z^{-1} とする。さらに、適当な中間変数 $v(k)$ を導入すれば、式 (2.77) は

$$y(k) = (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n})v(k), \quad v(k) = \frac{u(k)}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (2.78)$$

の二つの式に分解される。式 (2.78) は等価的に

$$\begin{aligned} y(k) &= b_1 v(k-1) + b_2 v(k-2) + \dots + b_n v(k-n) \\ v(k) &= u(k) - a_1 v(k-1) - a_2 v(k-2) - \dots - a_n v(k-n) \end{aligned} \quad (2.79)$$

に書き換えられる。いま、 $n \times 1$ 状態変数ベクトル $x(k) = [v(k-n), v(k-n+1), \dots, v(k-1)]^T$ を定義すれば、式 (2.79) は次の状態空間モデルによって実現できる。

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + bu(k) \\ y(k) &= cx(k) \end{aligned} \quad (2.80)$$

ただし、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [b_n \quad \cdots \quad b_2 \quad b_1]$$

この構造は可制御条件 $\text{rank}[\mathbf{b} \quad A\mathbf{b} \quad \cdots \quad A^{n-1}\mathbf{b}] = n$ を満たしているため、可制御正準形 (controllable canonical form) とよばれる。

一方、式 (2.77) は次式に変形できる。

$$y(k) = [b_1 u(k) - a_1 y(k)]z^{-1} + \cdots + [b_n u(k) - a_n y(k)]z^{-n} \tag{2.81}$$

さらに、式 (2.81) は次のように分解される。

$$\begin{aligned} x_1(k) &= z^{-1}[b_n u(k) - a_n y(k)] \\ x_2(k) &= z^{-1}[b_{n-1} u(k) - a_{n-1} y(k) + x_1(k)] \\ &\vdots \\ x_n(k) &= z^{-1}[b_1 u(k) - a_1 y(k) + x_{n-1}(k)] \\ y(k) &= x_n(k) \end{aligned} \tag{2.82}$$

いま、 $n \times 1$ 状態変数ベクトル $\mathbf{x}(k) = [x_1(k) \quad x_2(k) \quad \cdots \quad x_n(k)]^T$ を定義すれば、式 (2.82) は次の状態空間モデルによって実現できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \tilde{A}\mathbf{x}(k) + \tilde{\mathbf{b}}u(k) \\ y(k) &= \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{x}(k) \end{aligned} \tag{2.83}$$

ただし、

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & -a_2 \\ 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} b_n \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{c}} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

この構造は可観測条件 $\text{rank}[\tilde{\mathbf{c}}^T \quad (\tilde{\mathbf{c}}\tilde{A})^T \quad \cdots \quad (\tilde{\mathbf{c}}\tilde{A}^{n-1})^T]^T = n$ を満たしているため、可観測正準形 (observable canonical form) とよばれる。

式 (2.80) と式 (2.83) の係数行列を比較すれば $\tilde{A} = A^T$ 、 $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{c}^T$ 、 $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{b}^T$ が成立し、 $H(z) = H(z)^T$ であるから、式 (2.80) の状態空間モデルの伝達関数と式 (2.83) の伝達関数は一致する。このため、式 (2.83) は式 (2.80) に対する双対システム (dual system) という。

そのほか、状態空間デジタルフィルタの設計¹⁵⁾、丸め誤差の最小化^{16,17)}、係数感度の解析と最小化¹⁸⁾についての研究がある。

参考文献

- 1) 高橋進一, 池原雅章, “デジタルフィルタ,” 培風館, 東京, 1999.
- 2) E.I. Jury, “Theory and Application of the z-Transform Method,” John Wiley, New York, 1964.
- 3) A. Antoniou, “Digital Filters: Analysis, Design, and Applications,” 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1993.
- 4) R.A. Roberts and C.T. Mullis, “Digital Signal Processing,” Addison-Wesley, Reading MA., 1987.
- 5) A. Antoniou, “Digital Signal Processing: Signals, Systems, and Filters,” McGraw-Hill, New York, 2006.
- 6) T.W. Parks and C.S. Burrus, “Digital Filter Design,” John Wiley, New York, 1987.
- 7) K. Steiglitz, “Computer-aided design of recursive digital filters,” IEEE Trans. Audio and Electroacoustics, vol.AU-18, no.2, pp.123-129, 1970.
- 8) A. Antoniou and W.-S. Lu, “Practical Optimization: Algorithms and Engineering Applications,” Springer, New York, 2007.
- 9) L.R. Rabiner, N.Y. Graham, and H.D. Helms, “Linear programming design of IIR digital filters with arbitrary magnitude function,” IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing,” vol.ASSP-22, no.2, pp.117-123, 1974.
- 10) L.R. Rabiner and R.-B. Gold, “Theory and Application of Digital Signal Processing,” Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1975.
- 11) W.-S. Lu and T. Hinamoto, “Optimal design of IIR digital filters with robust stability using conic-quadratic-programming updates,” IEEE Trans. Signal Processing, vol.51, no.6, pp.1581-1592, 2003.
- 12) C.S. Burrus and T.W. Parks, “Time domain design of recursive digital filters,” IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, vol.AU-18, no.2, pp.137-141, 1970.
- 13) A.G. Evans and R. Fischl, “Optimal least squares time-domain synthesis of recursive digital filters,” IEEE Trans. Audio and Electroacoustics, vol.AU-21, no.1, pp.61-65, 1973.
- 14) C.T. Mullis and R.A. Roberts, “The use of second-order information in the approximation of discrete-time linear systems,” IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol.ASSP-24, no.3, pp.226-238, 1976.
- 15) B. Beliczynski, I. Kale, and G.D. Cain, “Approximation of FIR by IIR digital filters: An algorithm based on balanced model reduction,” IEEE Trans. Signal Processing, vol.40, no.3, pp.532-542, 1992.
- 16) S.Y. Hwang, “Minimum uncorrelated unit noise in state-space digital filtering,” IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol.ASSP-25, no.4, pp.273-281, 1977.
- 17) T. Hinamoto, H. Ohnishi, and W.-S. Lu, “Roundoff noise minimization of state-space digital filters using separate and joint error feedback/coordinate transformation optimization,” IEEE Trans. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol.50, no.1, pp.23-33, 2003.
- 18) T. Hinamoto, K. Iwata, and W.-S. Lu, “L2-sensitivity minimization of one- and two-dimensional state-space digital filters subject to L2-scaling constraints,” IEEE Trans. Signal Processing, vol.54, no.5, pp.1804-1812, 2006.